

Дидактические материалы

класс

Базовый уровень

4-е издание, переработанное

**Москва
·Просвещение·
2010**

УДК 372.8:[512 + 517]
ББК 74.262.21
А45



Авторы:

М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, Р. Г. Газарян

А45 Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс : базовый уровень / [М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, Р. Г. Газарян]. — 4-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 2010. — 207 с. : ил. — ISBN 978-5-09-019611-6.

Дидактические материалы составлены к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа и опираются на учебник Ш. А. Алимова и др. Книга содержит задания ко всем параграфам, контрольные работы, задания для подготовки к экзамену и для интересующихся математикой, а также справочные сведения и примеры с подробными решениями.

УДК 372.8:[512 + 517]
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-019611-6

- © Издательство «Просвещение», 2005
 - © Издательство «Просвещение», 2010, с изменениями
 - © Художественное оформление. Издательство «Просвещение», 2005
- Все права защищены

Предисловие

Основная цель пособия — дополнить систему упражнений учебника заданиями, позволяющими учителю организовать дифференцированную и индивидуальную работу учащихся на всех этапах урока.

Дидактические материалы составлены к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа, а также к основным темам курса алгебры основной школы. Все предложенные в пособии задания снабжены либо ответами в конце книги, либо ответами, решениями или указаниями сразу после их формулировки.

В каждой главе пособия содержатся:

- 1) дидактические материалы к каждому параграфу учебника;
- 2) контрольная работа по теме;
- 3) задания для подготовки к экзамену по изучаемой теме (большинство из предложенных заданий давалось на выпускных экзаменах в школах России начиная с 1991 г.);

4) задания для интересующихся математикой (одна из целей этих заданий — подготовка к решению сложных задач ЕГЭ).

Каждый параграф пособия включает:

- 1) справочные сведения;
- 2) примеры и задачи с подробными решениями;
- 3) разноуровневые задачи для самостоятельной работы в двух вариантах (каждое задание имеет условную балловую оценку степени его сложности).

Материалы пособия могут служить основной частью учебно-методического комплекта по алгебре и началам математического анализа для учащихся 10—11 классов:

- общеобразовательных;
- гуманитарных;
- с естественно-научным, техническим и математическим уклоном, в которых математика изучается в объёме до 6 часов в неделю.

Используя балловую оценку заданий, учитель может:

- организовать «плавную» дифференциацию обучения математике: в зависимости от качества усвоения темы каждому учащемуся предлагать конкретный балловый диапазон выполняемых заданий, помогая постепенно поднимать уровень своих математических знаний и умений;
- предложить разнообразные виды частично самостоятельных, самостоятельных и проверочных работ, например предложить выполнить больший объём заданий разной степени сложности и указать, сколько баллов нужно набрать для получения той или иной оценки (3, 4 или 5).

Следует заметить, что обязательному уровню знаний и умений соответствуют задания, оценённые в пособии в основном баллами 1, 2, 3, 4. Учащиеся, претендующие на отличную оценку, должны справляться с заданиями, оценёнными в 6—7 баллов.

Контрольные работы по темам состоят из двух частей. Выполнение первой части работы (до черты) позволяет учащемуся получить оценку 3. Для получения оценки 4 учащийся должен справиться с первой частью работы и верно решить одну из задач второй части (за чертой). Чтобы получить оценку 5, помимо выполнения первой части работы, учащийся должен решить не менее двух любых заданий из второй части работы.

Расположение материала в пособии соответствует учебнику алгебры и начал математического анализа авторов П. А. Алимова и др. (2010 г. и последующие годы издания). Однако содержание и структура пособия позволяют с успехом использовать его и при работе по другим учебникам.

Материал для повторения курса алгебры 7—9 классов

Общие теоретические сведения

1. Обозначения классов чисел:

N — множество натуральных чисел; Z — множество целых чисел; Q — множество рациональных чисел; R — множество действительных чисел.

2. Числовые промежутки:

1) отрезок $[a; b]$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, где $a < b$;

2) интервал $(a; b)$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где $a < b$;

3) полуинтервал $[a; b)$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$, где $a < b$; полуинтервал $(a; b]$ — множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x \leq b$, где $a < b$;

4) луч — множество чисел x , удовлетворяющих одному из неравенств $x < a$, $x > a$, $x \leq a$, $x \geq a$, где a — некоторое число.

3. Стандартный вид числа — запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq |a| < 10$, $n \in Z$, a — мантисса числа, n — порядок числа.

4. Формулы сокращённого умножения:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2; \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b); & (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; & a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2); \\ & & a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

5. Уравнение с одним неизвестным — это равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

6. Числовое неравенство $a > b$ ($a < b$) означает, что разность $a - b$ положительна (отрицательна); если $a > b$, то $b < a$. Нестрогое неравенство $a \geq b$ означает, что или $a > b$, или $a = b$.

Свойства нестрогих неравенств такие же, как и свойства строгих неравенств:

1) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

2) если $a > b$, то $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$ для любого c (любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив его знак на противоположный);

3) если $a > b$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ при $c > 0$, $ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ при $c < 0$;

4) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

5) если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$;

6) если $a > b \geq 0$, то $a^n > b^n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Среднее арифметическое чисел a и b — число $\frac{a + b}{2}$.

Среднее геометрическое неотрицательных чисел a и b — число $\sqrt{ab}$.

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

7. Неравенство с одним неизвестным — это неравенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Решение неравенства с одним неизвестным — это значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Свойства неравенств:

1) любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив его знак на противоположный, при этом знак неравенства не меняется;

2) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, причём: если это число положительно, то знак неравенства не меняется; если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

8. Функция.

Если каждому x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие единственное число y , то говорят, что на этом множестве задана функция $y(x)$. При этом x называют независимой переменной (или аргументом), а y — зависимой переменной (или функцией).

Область определения функции — множество всех значений, которые может принимать её аргумент (если функция задана формулой, то считают, что её область определения — множество значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл).

Функция $y(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, т. е. для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) > y(x_1)$ (следует неравенство $y(x_2) < y(x_1)$).

Чётная функция — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = y(x)$ для каждого x из области её определения. График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечётная функция — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = -y(x)$ для каждого x из области её определения.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

9. Прогрессии.

Арифметическая прогрессия — числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, удовлетворяющая условию $a_{n+1} = a_n + d$, где n — любое натуральное число, а d — заданное число, называемое разностью этой прогрессии.

Формула n -го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия — числовая последовательность $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, удовлетворяющая условию $b_{n+1} = b_n q$, где n — любое натуральное число, а q — заданное число, называемое знаменателем этой прогрессии, причём $b_1 \neq 0, q \neq 0$.

Формула n -го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

1. Квадратные уравнения

Справочные сведения

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — заданные числа, причём $a \neq 0$, а x — неизвестное число.

Формулы корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного уравнения, определяет наличие и количество действительных корней.

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Два различных корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	Один корень $x = -\frac{b}{2a}$	Нет действительных корней

Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называют приведённым. Если p — чётное число, то при $p^2 - 4q \geq 0$ корни уравнения удобно находить по формулам:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета. Если p , q , x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Если x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то при всех x справедливо равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (*)$$

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, называют биквадратным. При замене $x^2 = t$ оно сводится к квадратному.

Примеры с решениями

Решить уравнение $2x^4 - 17x^2 - 9 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = t$, тогда $x^4 = t^2$ и данное уравнение запишем в виде $2t^2 - 17t - 9 = 0$. Решим это уравнение:

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 361 > 0, \quad t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 2} = \frac{17 \pm 19}{4},$$

откуда $t_1 = 9$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Уравнение $x^2 = 9$ имеет два корня: $x_{1,2} = \pm 3$; уравнение $x^2 = -\frac{1}{2}$ не имеет действительных корней. **Ответ.** $x_{1,2} = \pm 3$.

Сократить дробь $\frac{x^2 - x - 20}{4 - 7x - 2x^2}$.

Решение. 1) Разложим на множители числитель дроби. Так как $-4 \cdot 5 = -20$ и $-4 + 5 = 1 = -(-1)$, то, согласно теореме, обратной теореме Виета, числа $x_1 = -4$ и $x_2 = 5$ являются корнями уравнения $x^2 - x - 20 = 0$, тогда по формуле (*) имеем $x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$.

2) Разложим на множители знаменатель дроби. Для этого найдём корни уравнения $-2x^2 - 7x + 4 = 0$:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 4 = 49 + 32 = 81, \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot (-2)} = \frac{7 \pm 9}{-4},$$

откуда $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Тогда по формуле (*) получим

$$-2x^2 - 7x + 4 = -2(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

3) Сократим дробь

$$\frac{x^2 - x - 20}{4 - 7x - 2x^2} = \frac{(x + 4)(x - 5)}{-2(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{x - 5}{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{x - 5}{1 - 2x}.$$

Найти все значения m , при которых уравнение $mx^2 + x - 3 = 0$ имеет один корень.

Решение. 1) При $m = 0$ исходное уравнение является линейным $x - 3 = 0$ и имеет один корень $x = 3$.

2) При $m \neq 0$ исходное уравнение квадратное, имеющее один корень в случае $D = 0$.

$$D = 1^2 - 4 \cdot m \cdot (-3) = 1 + 12m, \quad 1 + 12m = 0 \quad \text{при} \quad m = -\frac{1}{12}.$$

Ответ. $m = 0$ и $m = -\frac{1}{12}$.

Решить уравнение $(x^2 - 5x + 6)\sqrt{2x - 5} = 0$.

Решение. Произведение двух множителей равно нулю, когда хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом имеет смысл. Корни данного уравнения найдём в результате рассмотрения двух случаев:

$$1) \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ 2x - 5 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x \geq 2,5, \end{cases} \quad \begin{matrix} x_2 = 3, \\ x = 3. \end{matrix}$$

$$2) \quad 2x - 5 = 0, \quad x = 2,5.$$

Ответ. $x_1 = 3, x_2 = 2,5$.

Разложив на множители многочлен $P(x)$, решить уравнение $P(x) = 0$, если $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Решение. $P(x) = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - 3x - 3 = (x^3 + 2x^2 - 3x) + (x^2 + 2x - 3) = x(x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 2x - 3) = (x + 1)(x^2 + 2x - 3) = (x + 1)(x - 1)(x + 3)$.

$(x + 1)(x - 1)(x + 3) = 0$, откуда $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -3$.

Ответ. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -3$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить уравнение (1—6).

1. [3] $(3x - 4)^2 - (5x - 2)(5x + 2) + 20 = 0$.

2. [4] $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = 0$. 3. [5] $\frac{2x^2 + 4}{3} - \frac{2 - 3x}{4} = \frac{x^2 + 8}{6}$.

4. [5] $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$. 5. [5] $\frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x + 3} = \frac{5}{8}$.

6. [6] $\frac{1}{2x^2 - x - 3} + \frac{1}{2x^2 - 9x + 9} = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$.

7. [6] Упростить выражение

$$\frac{11 - 2a^2}{a - 3} - \frac{a^2 + 19a + 60}{a + 6} : \left(\frac{81}{2a^2 + 7a - 30} - \frac{a + 6}{2a - 5} \right).$$

Решить систему уравнений (8—11).

8. [5]
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

9. [5]
$$\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - y^2 = 14. \end{cases}$$

10. [5]
$$\begin{cases} (x - 2)(y - 3) = 1, \\ \frac{x - 2}{y - 3} = 1. \end{cases}$$

11. [6]
$$\begin{cases} x + xy + y = -3, \\ x - xy + y = 1. \end{cases}$$

Решить задачу (12—13).

12. [6] Две бригады рабочих закончили ремонт участка дороги за 4 ч. Если бы сначала одна из них отремонтировала половину всего участка, а затем другая — оставшуюся часть, то весь ремонт был бы закончен за 9 ч. За сколько времени каждая бригада в отдельности могла бы отремонтировать весь участок?

13. [6] Моторная лодка, собственная скорость которой составляет 15 км/ч, прошла по течению реки 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 40 мин больше, чем на путь по течению реки. Найти скорость течения реки.

Решить относительно x уравнение (14—16).

14. [6] $ax^2 - 2x = 0.$

15. [6] $x^2 - a = 3.$

16. [7] $(a^2 - 9)x^2 - 2ax + 1 = 0.$

17. [6] Известно, что $x = 1$ — корень уравнения $3x^2 + px - 2 = 0$. Найти p и разложить левую часть уравнения на множители.

18. [7] Разложив на множители многочлен $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, решить уравнение $P(x) = 0$.

Вариант II

Решить уравнение (1—6).

1. [3] $(4x + 3)(4x - 3) - (6x - 1)^2 + 18 = 0.$

2. [4] $\frac{x^2 - 49}{x + 7} = 0.$

3. [5] $\frac{x^2 + x}{4} - \frac{3 - 7x}{20} = 0,3.$

4. [5] $x^4 - 4x^2 - 5 = 0.$

5. [5] $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} = \frac{3}{8}.$

6. [6] $\frac{1}{2x^2 - 3x - 9} + \frac{3}{x^2 - x - 6} = \frac{x}{2x^2 + 7x + 6}.$

7. [6] Упростить выражение

$$\left(\frac{36a^2}{5a^2 + 13a - 6} - \frac{5a - 2}{a + 3} \right) : \frac{11a - 2}{a^2 - 2a - 15} - \frac{28a - a^2}{2 - 5a}.$$

Решить систему уравнений (8—11).

8. [5] $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x - y = 3. \end{cases}$

9. [5] $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 15. \end{cases}$

10. [5] $\begin{cases} \frac{x+1}{y-3} = 1, \\ (x+1)(y-3) = 4. \end{cases}$

11. [6] $\begin{cases} x - xy - y = -7, \\ x + xy - y = 1. \end{cases}$

Решить задачу (12—13).

12. [6] За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности было вспахано $\frac{2}{3}$ поля. За сколько дней можно было вспахать всё поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать всё поле на 5 дней быстрее, чем вторым?

13. [6] Лодка проплыла 21 км по течению реки и 6 км против течения за то же время, какое понадобилось бы плоту, чтобы проплыть 10 км. Зная, что собственная скорость лодки равна 5 км/ч, найти скорость течения реки.

Решить относительно x уравнение (14—16).

14. [6] $ax^2 + 3x = 0.$

15. [6] $x^2 + 4 = a.$

16. [7] $(9 - a^2)x^2 - 6x + 1 = 0.$

17. [6] Известно, что $x = 2$ — корень уравнения $4x^2 - 14x + q = 0$. Найти q и разложить левую часть уравнения на множители.

18. [7] Разложив на множители многочлен $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$, решить уравнение $P(x) = 0$.

2. Квадратичная функция

Справочные сведения

Функция $y = ax^2 + bx + c$, где a , b и c — заданные числа, $a \neq 0$, x — действительная переменная, называется квадратичной функцией.

Значения x , при которых функция принимает значение, равное нулю, называют нулями функции.

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, полученная сдвигами параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей и пересекающая ось Oy в точке $(0; c)$.

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ — координаты вершины параболы.

Прямая $x = -\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

Примеры с решениями

Построить график функции $y = -2x^2 + 3x + 5$.

Решение. 1) Найдём координаты вершины параболы.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot (-2)} = \frac{3}{4};$$

$$y_0 = y(x_0) = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} + 5 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 5 = 6\frac{1}{8}.$$

2) На координатной плоскости отметим точку $\left(\frac{3}{4}; 6\frac{1}{8}\right)$ — вершину параболы — и через неё проведём вертикальную прямую — ось симметрии параболы.

3) Отметим на координатной плоскости точку $(0; 5)$ и симметричную ей относительно прямой $x = \frac{3}{4}$ точку $\left(1\frac{1}{2}; 5\right)$.

4) Найдём нули функции при решении уравнения $-2x^2 + 3x + 5 = 0$:

$$D = 9 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 9 + 40 = 49,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm 7}{-4},$$

$$\text{откуда } x_1 = \frac{-3 + 7}{-4} = -1, \quad x_2 = \frac{-3 - 7}{-4} = 2\frac{1}{2}.$$

Построим точки $(-1; 0)$ и $\left(2\frac{1}{2}; 0\right)$.

5) Через отмеченные на координатной плоскости 5 точек проведём параболу (рис. 1).

Построить график функции $y = |-(x+2)^2 + 4|$.

Решение. График функции $y = -(x+2)^2 + 4$ строится сдвигами графика функции $y = -x^2$ (на рисунке 2 параболы ①) вдоль оси Ox на 2 единицы влево (парабола ②) и на 4 единицы вверх (парабола ③). График функции $y = |-(x+2)^2 + 4|$ получается из графика ③ зеркальным отражением относительно оси Ox той её части, которая лежит в нижней полуплоскости. Это кривая ④.

Выяснить, при каком значении x функция $y = mx^2 - 6x + 5$ принимает наибольшее значение.

Решение. 1) При $m = 0$ задающая функцию формула принимает вид $y = -6x + 5$. Эта функция линейная, поэтому наибольшего значения не имеет.

2) При $m > 0$ заданная функция квадратичная, ветви графика которой направлены вверх. Наибольшего значения в этом случае функция также не имеет.

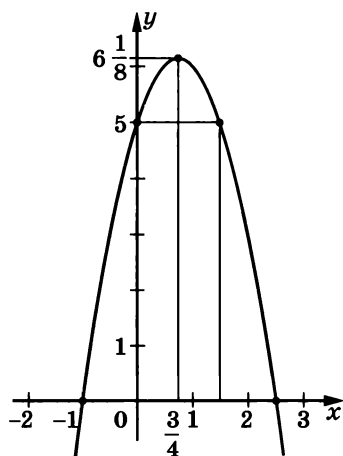


Рис. 1

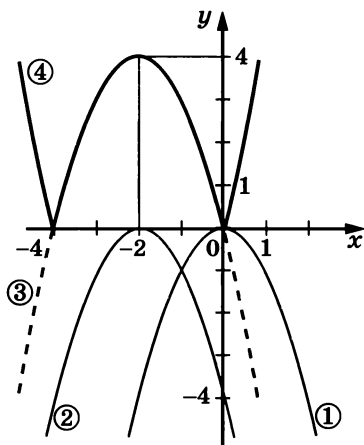


Рис. 2

3) При $m < 0$ квадратичная функция, ветви графика которой направлены вниз, принимает наибольшее значение в точке, являющейся абсциссой вершины параболы, т. е. в точке

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2m} = \frac{3}{m}.$$

Ответ. При $x = \frac{3}{m}$, где $m < 0$.

Прямая l задана уравнением $y = 3x - 6$. Записать уравнение прямой, симметричной l относительно: 1) оси Oy ; 2) оси Ox ; 3) точки $(0; 0)$.

Решение. Если прямая l задана уравнением $y = kx + b$, то уравнение прямой, симметричной прямой l относительно оси Oy , получается из уравнения $y = kx + b$ заменой x на $-x$ ($y = -kx + b$). Уравнениями $-y = kx + b$ ($y = -kx - b$), $-y = -kx + b$ ($y = kx - b$) задаются прямые, симметричные прямой l относительно оси Ox и точки $(0; 0)$ соответственно (в первом случае y заменяется на $-y$, а во втором x и y заменяются на $-x$ и $-y$).

Ответ. 1) $y = -3x - 6$; 2) $y = -3x + 6$; 3) $y = 3x + 6$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [3] Записать уравнение параболы, полученной сдвигом параболы $y = 3x^2$ на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз.
2. [3] Записать уравнение параболы, полученной сдвигом параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы влево и на 4 единицы вверх.

Построить график функции (3—7).

3. [4] $y = 2(x + 3)^2 - 2$.

4. [4] $y = -(x - 2)^2 + 3$.

5. [4] $y = 3x^2 - 6x - 2$.

6. [5] $y = |x^2 - 2x - 3|$.

7. [6] $y = x^2 - 2|x| - 3$.

Определить, при каком значении x квадратичная функция принимает наибольшее (наименьшее) значение; найти это значение (8—9).

8. [5] $y = x^2 - 2x - 4$.

9. [5] $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 8$.

10. [6] Прямая l задана уравнением $y = -6x + 8$. Записать уравнение прямой, симметричной прямой l относительно:
1) оси Oy ; 2) оси Ox ; 3) точки $(0; 0)$.

Вариант II

1. [3] Записать уравнение параболы, полученной сдвигом параболы $y = 2x^2$ на 4 единицы влево и на 3 единицы вверх.
2. [3] Записать уравнение параболы, полученной сдвигом параболы $y = -\frac{1}{3}x^2$ на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз.

Построить график функции (3—7).

3. [4] $y = 3(x - 2)^2 + 1$.

4. [4] $y = -(x + 3)^2 - 1$.

5. [4] $y = 2x^2 - 8x + 7$.

6. [5] $y = |x^2 + 2x - 3|$.

7. [6] $y = x^2 + 2|x| - 3$.

Определить, при каком значении x квадратичная функция принимает наибольшее (наименьшее) значение; найти это значение (8—9).

8. [5] $y = 3x^2 - 6x + 1$.

9. [5] $y = -x^2 - 4x + 7$.

10. [6] Графики функций $y = 2x + b$ и $y = kx + 4$ симметричны относительно оси Ox . Найти коэффициенты b и k .

3. Решение квадратных неравенств с помощью графика квадратичной функции

Примеры с решениями

Решить неравенство $-x^2 + x + 2 > 0$.

Решение. Ветви параболы $y = -x^2 + x + 2$ направлены вниз. Выясним, имеет ли эта парабола общие точки с осью Ox , для чего найдём корни уравнения $-x^2 + x + 2 = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Изобразим схематически график функции $y = -x^2 + x + 2$ (рис. 3). Исходному

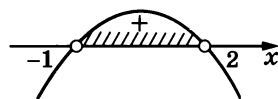


Рис. 3

неравенству удовлетворяют значения x , при которых точки параболы лежат выше оси Ox .

Ответ. $-1 < x < 2$.

Решить неравенство $4x^2 + 12x + 9 \leq 0$.

Решение. Выясним, есть ли общие точки у параболы $y = 4x^2 + 12x + 9$ с осью Ox . Уравнение $4x^2 + 12x + 9 = 0$ имеет один корень $x = -\frac{3}{2}$. На рисунке 4 схематически изображён график функции $y = 4x^2 + 12x + 9$. Так как при всех $x \neq -\frac{3}{2}$ точки параболы лежат выше оси Ox , а $y = 0$ при $x = -\frac{3}{2}$, то исходному нестрогому неравенству удовлетворяет единственное значение $x = -\frac{3}{2}$.

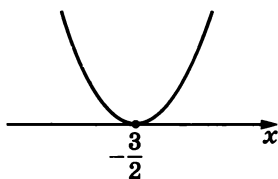


Рис. 4

Ответ. $x = -\frac{3}{2}$.

Решить относительно x неравенство $x^2 + 2ax + a^2 - a + 3 > 0$.

Решение. Найдём дискриминант квадратного уравнения

$$x^2 + 2ax + a^2 - a + 3 = 0. \quad (1)$$

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - a + 3) = 4a^2 - 4a^2 + 4a - 12 = 4a - 12.$$

1) Если $D < 0$ (при $a < 3$), уравнение (1) не имеет корней. Схематически график функции

$$y = x^2 + 2ax + a^2 - a + 3 \quad (\text{при } a < 3) \quad (2)$$

изображён на рисунке 5. Так как при любом x точки параболы лежат выше оси Ox ($y > 0$), то решением исходного неравенства является любое действительное x .

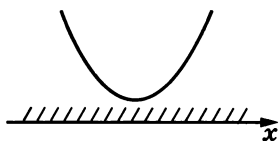


Рис. 5

2) Если $D = 0$ (при $a = 3$), уравнение (1) имеет один корень $x = -3$. Решениями исходного неравенства являются все действительные числа, кроме $x = -3$ (рис. 6).

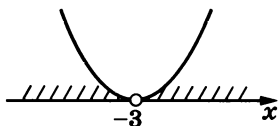


Рис. 6

3) Если $D > 0$ (при $a > 3$), уравнение (1) имеет два корня $x_1 = -a - \sqrt{a - 3}$, $x_2 = -a + \sqrt{a - 3}$. Очевидно, решениями исходного неравенства являются все значения x из промежутков $x < -a - \sqrt{a - 3}$ и $x > -a + \sqrt{a - 3}$ (рис. 7).



Рис. 7

Ответ. 1) Если $a < 3$, то решениями неравенства являются все действительные x ; 2) если $a = 3$, то $x \neq -3$; 3) если $a > 3$, то $x < -a - \sqrt{a - 3}$ и $x > -a + \sqrt{a - 3}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить неравенство (1—6).

1. $\boxed{5} -x^2 + x - 2 < 0.$
2. $\boxed{5} -x^2 + 3x - 5 \geq 0.$
3. $\boxed{5} x^2 - 8x \geq -16.$
4. $\boxed{5} 9x^2 + 25 \leq 30x.$
5. $\boxed{5} x^2 + 6 > 5x.$
6. $\boxed{5} x^2 < 3x.$
7. $\boxed{6}$ При каких значениях x имеет смысл выражение

$$\sqrt{3x^2 - x - 4}?$$

8. $\boxed{7}$ Показать, что при $q > 1$ решениями неравенства $x^2 - 2x + q > 0$ являются все значения x .
9. $\boxed{7}$ Показать, что при $q > 4$ неравенство $x^2 - 4x + q \leq 0$ не имеет решений.

Вариант II

Решить неравенство (1—6).

1. $\boxed{5} -x^2 + 3x - 4 < 0.$
2. $\boxed{5} -x^2 + 4x - 7 \geq 0.$
3. $\boxed{5} x^2 + 12x \geq -36.$
4. $\boxed{5} 16x^2 + 1 \leq 8x.$
5. $\boxed{5} x^2 + 4x > 5.$
6. $\boxed{5} x^2 < 4.$
7. $\boxed{6}$ При каких значениях x имеет смысл выражение

$$\sqrt{6x^2 - x - 1}?$$

8. $\boxed{7}$ Показать, что при $q > 4$ решениями неравенства $x^2 + 4x + q > 0$ являются все значения x .
9. $\boxed{7}$ Показать, что при $q > 1$ неравенство $x^2 + 2x + q \leq 0$ не имеет решений.

4. Метод интервалов

Справочные сведения

Метод интервалов удобно применять для решения неравенств, левая часть которых дробь, числитель и знаменатель которой являются произведениями двучленов вида $x - a$ (в частности, когда знаменатель равен 1), а правая часть равна нулю.

Примеры с решениями

Решить неравенство

$$(x - 7)^6(x - 3)x(x + 1)^3(x^2 - x + 1) > 0.$$

Решение. Так как $x^2 - x + 1 > 0$ при любом x , а знак $(x + 1)^3$ совпадает со знаком $(x + 1)$ при всех $x \neq -1$, то множества решений исходного неравенства и неравенства $(x - 7)^6(x - 3)x(x + 1) > 0$ совпадают. При $x = 7$ это неравенство неверно. Так как $(x - 7)^6 > 0$ при всех $x \neq 7$, то для всех $x \neq 7$ множество решений исходного неравенства совпадает с множеством решений неравенства

$$(x - 3)x(x + 1) > 0. \quad (1)$$

Отметим «выколотыми» на числовой оси точку $x = 7$ и корни уравнения $(x - 3)x(x + 1) = 0$, т. е. точки $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ (рис. 8), так как числа 3, 0 и -1 также не являются решениями строгого неравенства (1). Точки x_1 , x_2 и x_3 разбивают числовую ось на четыре промежутка. При $x > 3$ все множители неравенства (1) положительны. При переходе через точки $x = 3$, $x = 0$, $x = -1$ многочлен в левой части неравенства меняет свой знак, что и отмечается на рисунке 8.

Ответ. $-1 < x < 0$, $3 < x < 7$, $x > 7$.

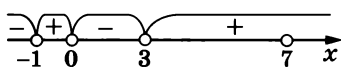


Рис. 8

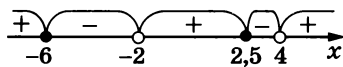


Рис. 9

Решить неравенство $\frac{(2x - 5)(x + 6)}{(x + 2)(4 - x)} \geq 0$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде

$$\frac{2(x - 2,5)(x + 6)}{(x + 2)(x - 4)} \leq 0. \quad (1)$$

Отметим на числовой оси точки $x_1 = -6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2,5$ и $x_4 = 4$, при которых двучлены в числителе и знаменателе дроби, стоящей в левой части неравенства, обращаются в нуль. При этом точки $x = -2$ и $x = 4$ отметим «выколотыми», так как при этих значениях x дробь не имеет смысла (рис. 9).

Расставим знаки значений дроби на образовавшихся пяти промежутках и выберем из них те, которые являются решениями нестрогого неравенства (1).

Ответ. $-6 \leq x < -2$, $2,5 \leq x < 4$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить неравенство (1—10).

1. [4] $(x - 1)(x - 3)(x + 2) > 0$.

2. [5] $(2x + 3)(x - 1)(5 + x) < 0$.

3. [5] $\frac{1}{2}x^3 - 2x \geq 0$.

4. [6] $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 9) \leq 0$.

5. [6] $(x^2 + 4x + 4)(x^2 - 16) \geq 0$.

6. [6] $\frac{4x^2 - 12x + 9}{x + 5} \leq 0$.

$$7. \boxed{7} \frac{(x+1)(x-3)(x-9)}{(x-7)^2} < 0.$$

$$8. \boxed{6} (x-9)^7(x-1)^6(x+1)x^2 \geq 0.$$

$$9. \boxed{6} (5x-1)^3(x^2+x+5) < 0.$$

$$10. \boxed{7} \frac{x^4 - x^2 - 12}{x^3 + 1} > 0.$$

Вариант II

Решить неравенство (1—10).

$$1. \boxed{4} (x-3)(x+1)(x+4) < 0.$$

$$2. \boxed{5} (3x-1)(x-2)(x+1) > 0.$$

$$3. \boxed{5} \frac{1}{3}x^3 - 3x \leq 0.$$

$$4. \boxed{6} (x^2 - 7x + 12)(x^2 - 4) \geq 0.$$

$$5. \boxed{6} (x^2 + 6x + 9)(x^2 - 1) \leq 0.$$

$$6. \boxed{6} \frac{9x^2 + 12x + 4}{x-6} \geq 0.$$

$$7. \boxed{7} \frac{(x+2)(x-3)(x-4)}{(x-2)^2} > 0.$$

$$8. \boxed{6} (x-3)^{10}(x-1)^9x^4(x+2) \leq 0.$$

$$9. \boxed{6} (x^2 - x + 3)(6x + 1)^5 > 0.$$

$$10. \boxed{7} \frac{x^4 - 8x^2 - 9}{x^3 - 1} < 0.$$

5. Уравнения и неравенства,

содержащие неизвестное под знаком модуля

Справочные сведения

Модуль числа a (обозначается $|a|$) определяется формулой

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрически $|a|$ — расстояние от точки 0 на числовой прямой до точки, изображающей число a .

$|a - b|$ — расстояние между точками с координатами a и b на числовой прямой.

Некоторые свойства модуля:

$$1) |a| \geq 0; \quad 2) |-a| = |a|; \quad 3) |ka| = |k| \cdot |a|; \quad 4) |a|^2 = a^2.$$

Примеры с решениями

Уравнения с модулем

Решить уравнение $|5 - x| = -2$.

Решение. Уравнение не имеет корней, так как по 1-му свойству модуля $|5 - x| \geq 0$ при любом x .

Ответ. Корней нет.

Решить уравнение $|x^2 - 1| + |x^2 + x| = 0$.

Решение. При любом x справедливы неравенства $|x^2 - 1| \geq 0$ и $|x^2 + x| \geq 0$, поэтому корнями исходного уравнения являются

те значения x , которые обращают в нуль оба слагаемых левой части уравнения, т. е. получим систему $\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 + x = 0, \end{cases}$ решая ко-

торую, находим

$$x^2 - 1 = 0 \text{ при } x = \pm 1; x^2 + x = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_2 = -1.$$

Очевидно, что решением системы является $x = -1$.

Ответ. $x = -1$.

Решить уравнение $|2x - 5| = |x + 3|$.

Решение. Модули одинаковых и противоположных чисел равны. Поэтому $2x - 5 = \pm(x + 3)$. Решая полученные уравнения, находим ответ: $x_1 = 8, x_2 = \frac{2}{3}$.

Решить уравнение $|3x - 1| = x^2 + 1$.

Решение. Так как $x^2 + 1 > 0$ при любом x , то $3x - 1 = \pm(x^2 + 1)$. Решим эти уравнения.

1) $3x - 1 = x^2 + 1$, откуда $x^2 - 3x + 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются $x_1 = 1, x_2 = 2$.

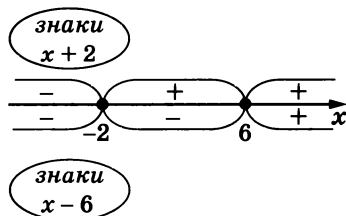
2) $3x - 1 = -(x^2 + 1)$, откуда $x^2 + 3x = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -3, x_2 = 0$.

Ответ. $x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$.

Решить уравнение $|x + 2| - 8 = |x - 6|$.

Решение. Точки $x = -2$ и $x = 6$ разбивают числовую прямую на три промежутка. При переходе через каждую из этих точек значение одного из выражений, стоящих под знаками модулей, меняет свой знак (рис. 10). Учитывая этот факт, решим исходное уравнение на каждом из образовавшихся промежутков:

$$1) \begin{cases} x < -2, \\ -(x + 2) - 8 = -(x - 6), \\ x < -2, \\ -x - 2 - 8 = -x + 6, \\ x < -2, \\ -10 = 6. \end{cases}$$



Система не имеет решений.

Рис. 10

$$2) \begin{cases} -2 \leq x < 6, \\ x + 2 - 8 = -(x - 6), \\ -2 \leq x < 6, \\ x - 6 = -x + 6, \\ -2 \leq x < 6, \\ x = 6. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x \geq 6, \\ x + 2 - 8 = x - 6, \\ x \geq 6, \\ x - 6 = x - 6, \\ x \geq 6, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Решение этой системы $x \geq 6$.

Ответ. $x \geq 6$.

Замечания.

а) Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$: 1) при $g(x) < 0$ не имеет корней; 2) при $g(x) \geq 0$ имеет корни, совпадающие со всеми корнями уравнений $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$, и только эти корни.

б) Корни уравнения $|f(x)| = |g(x)|$ совпадают со всеми корнями уравнений $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$.

в) Корни уравнения $|f(x)| = g(x)$ можно искать следующим образом: 1) найти корни уравнения $f^2(x) = g^2(x)$; 2) проверить найденные корни подстановкой в исходное уравнение.

Неравенства с модулем

Решить неравенство $|x^2 - 3| < -2$.

Решение. Так как $-2 < 0$, а $|x^2 - 3| \geq 0$ при всех значениях x , то исходное неравенство не имеет решений.

Решить неравенство $|2x - 1| \leq 3$.

Решение. Так как $3 > 0$, то, пользуясь геометрическим представлением понятия модуля, исходное неравенство заменяем двойным неравенством $-3 \leq 2x - 1 \leq 3$. Отсюда $-2 \leq 2x \leq 4$, $-1 \leq x \leq 2$.

Решить неравенство $|1 + 3x| \geq x^2 + 3$.

Решение. Заметим, что $x^2 + 3 > 0$ при любом x .

1) При $1 + 3x \geq 0$ имеем $1 + 3x \geq x^2 + 3$. Решим систему неравенств $\begin{cases} 1 + 3x \geq 0, \\ 1 + 3x \geq x^2 + 3; \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3}, \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3}, \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Решением системы является отрезок $1 \leq x \leq 2$ (рис 11).

2) При $1 + 3x < 0$ имеем $-(1 + 3x) \geq x^2 + 3$. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 1 + 3x < 0, \\ -1 - 3x \geq x^2 + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\frac{1}{3}, \\ x^2 + 3x + 4 \leq 0. \end{cases}$$

Рис. 11

Так как второе неравенство системы не имеет решений, то и вся система не имеет решений.

Ответ. $1 \leq x \leq 2$.

Решить неравенство $|3 - x| > |2x + 1|$.

Решение. Так как обе части неравенства при любом x — неотрицательные числа, воспользуемся свойством возведения обеих частей таких неравенств в натуральную степень (если $a > b \geq 0$, то $a^n > b^n$ при $n \in \mathbb{N}$). Обе части исходного неравенства возведём в квадрат:

$$|3 - x|^2 > |2x + 1|^2,$$

откуда $9 - 6x + x^2 > 4x^2 + 4x + 1$ и

$$3x^2 + 10x - 8 < 0. \quad (1)$$

Найдём корни уравнения $3x^2 + 10x - 8 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3(-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-10 \pm 14}{6},$$
$$x_1 = -4, x_2 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, решением неравенства (1), а значит, и исходного неравенства является промежуток $-4 < x < \frac{2}{3}$.

З а м е ч а н и я.

а) Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$: 1) при $g(x) \leq 0$ не имеет решений; 2) при $g(x) > 0$ имеет решения, совпадающие с решениями системы $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

б) Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ имеет те же решения, что и все решения неравенств $f(x) > g(x)$ и $f(x) < -g(x)$, и только эти решения.

в) Решения неравенств вида $|f(x)| < |g(x)|$ совпадают с решениями неравенства $f^2(x) < g^2(x)$, которое сводится к неравенству $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0$ (которое часто удаётся решить методом интервалов).

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить уравнение (1—8).

1. [3] $|3 - 2x| = -1$.

2. [3] $|4x + 1| = 0$.

3. [5] $\left| \frac{x}{2} - 1 \right| + |x^2 - 4| = 0$.

4. [5] $|x - 5| = |2x + 3|$.

5. [6] $|x - 6| = x^2$.

6. [6] $|3x - 2| = 2x + 1$.

7. [6] $|x^2 - 3x + 5| = x^2 - 7$.

8. [6] $|x + 3| - 5 = |x - 2|$.

Решить неравенство (9—16).

9. [4] $|3x - 1| \leq -2$.

10. [5] $|3x - 1| < 2$.

11. [5] $|2 - 5x| \leq 3$.

12. [5] $\left| \frac{x}{2} - 7 \right| > 2$.

13. [6] $|6 - 2x| \geq x - 1$.

14. [6] $|2 - 3x| > |x - 2|$.

15. [6] $|5 - 4x| < |5 + 2x|$.

16. [7] $\frac{|x + 4|}{|x + 6| - 2} > 1$.

Вариант II

Решить уравнение (1—8).

1. [3] $|5 - 3x| = -3$.

2. [3] $|7 + 2x| = 0$.

3. [5] $|x^2 - 9| + \left| \frac{x}{3} + 1 \right| = 0$.

4. [5] $|3x - 1| = |x + 5|$.

5. $\boxed{6} \quad |x - 12| = x^2.$

6. $\boxed{6} \quad |2x - 3| = x + 1.$

7. $\boxed{6} \quad |x^2 - 5x - 2| = x^2 - 1.$

8. $\boxed{6} \quad |x - 4| - 6 = |x + 2|.$

Решить неравенство (9—16).

9. $\boxed{4} \quad |2x - 5| \leq -3.$

10. $\boxed{5} \quad |2x - 5| < 3.$

11. $\boxed{5} \quad |3 - 2x| \leq 1.$

12. $\boxed{5} \quad \left| \frac{x}{3} - 2 \right| > 3.$

13. $\boxed{5} \quad |6 - 3x| \geq 2x + 1.$

14. $\boxed{6} \quad |3 - 4x| < |x + 3|.$

15. $\boxed{6} \quad |3x - 5| > |5 + x|.$

16. $\boxed{7} \quad \frac{|x + 4|}{|x + 6| - 2} \geq 1.$

Задания для подготовки к экзамену

Упростить (1—4).

1. $\boxed{4} \quad \frac{x + 1}{x^3 + x^2 + x} : \frac{1}{x^4 - x} - x^2.$ Ответ. $-1.$

2. $\boxed{5} \quad \left(\frac{1}{2 - 6a} + \frac{1}{27a^3 - 1} : \frac{1 + 3a}{1 + 3a + 9a^2} \right) \cdot \frac{2 + 6a}{a}.$ Ответ. $-\frac{1}{a}.$

3. $\boxed{5} \quad \frac{8 - n^3}{2 + n} : \left(2 + \frac{n^2}{2 + n} \right) - \frac{n^2}{n - 2} \cdot \frac{4 - n^2}{n^2 + 2n}.$ Ответ. $2.$

4. $\boxed{6} \quad \frac{6(a^3 + 27) \cdot |a + 4|}{(a^2 - 3a + 9)(a^2 + 7a + 12)}.$

Ответ. -6 при $a < -4$; 6 при $a > -4$.

5. $\boxed{6}$ Найти все значения k , при которых квадратное уравнение $3x^2 - 2kx - k + 6 = 0$ не имеет корней. Ответ. $-6 < k < 3.$

6. $\boxed{6}$ Найти a , при котором один из корней уравнения $2x^2 + ax + 3a = 0$ равен 3 . Ответ. $-3.$

7. $\boxed{5}$ Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$. Не решая этого уравнения, вычислить $\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}.$ Ответ. $\frac{4}{25}.$

8. $\boxed{7}$ Найти наибольшее целое отрицательное значение k , при котором уравнение $5x^2 + 2kx + 5 = 0$ имеет два положительных корня. Ответ. $-6.$

9. $\boxed{5}$ Решить уравнение $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}.$

Ответ. $x = 3.$

10. $\boxed{6}$ При каких значениях b корень уравнения $(2 - b)(b + x) = 15 - 7b$ больше или равен 3 ? Ответ. При $b < 2$ и $b = 3.$

Решить уравнение (11—15).

11. [6] $\left| \frac{x-1}{x+3} \right| = 1$. Ответ. $x = -1$.

12. [5] $x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0$.
Ответ. $x_1 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

13. [6] $|-x^2 - 16| = 8x$. Ответ. $x = 4$.

14. [7] $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$. Ответ. $x = 5$; $1 \leq x \leq 2$.

15. [8] $\|3-x| - x+1| + x = 6$. Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

Решить систему уравнений (16—18).

16. [5] $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$ Ответ. $(-3; -2)$, $(3; 2)$.

17. [6] $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^3 - y^3 = 37. \end{cases}$ Ответ. $(4; 3)$, $(-3; -4)$.

18. [7] $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$ Ответ. $\left(\frac{11}{13}; -4\frac{4}{5} \right)$.

19. [5] Решить неравенство $(x^3 - 1)(x^4 - 16) < 0$.
Ответ. $x < -2$; $1 < x < 2$.

20. [5] Решить неравенство $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.
Ответ. $1 < x < 3$; $3 < x < 5$.

21. [6] Решить неравенство $3x - 1 < 2|x|$. Ответ. $x < 1$.

22. [7] Решить неравенство $|x^2 - 8x + 15| < x - 3$.
Ответ. $4 < x < 6$.

23. [8] Решить неравенство $|x|(x^2 - 2x - 3) \geq 0$.
Ответ. $x \leq -1$; $x = 0$; $x \geq 3$.

24. [8] Найти наибольшее целое решение неравенства $x^2 + x - 10 < 2|x - 2|$. Ответ. 2.

25. [7] Первую четверть пути поезд двигался со скоростью 80 км/ч, а оставшуюся — со скоростью 60 км/ч. С какой средней скоростью двигался поезд? Ответ. 64 км/ч.

26. [8] Пассажир едет в трамвае и замечает, что параллельно трамвайной линии в противоположном направлении идёт его приятель. Через минуту человек вышел из трамвая

и, чтобы догнать приятеля, пошёл вдвое быстрее его, но в 4 раза медленнее трамвая. Через сколько минут пассажир догонит приятеля? Ответ. Через 9 мин.

27. [7] Бассейн наполняется двумя трубами за 7,5 ч. Если открыть только первую трубу, то бассейн наполнится на 8 ч быстрее, чем если открыть только вторую. Сколько времени будет наполняться бассейн второй трубой? Ответ. 20 ч.
28. [7] Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сушёные — 20%. Сколько нужно собрать свежих грибов, чтобы из них получилось 4,5 кг сушёных грибов? Ответ. 36 кг.
29. [8] К раствору, содержащему 39 г соли, добавили 1000 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10%. Найти первоначальную концентрацию соли в растворе. Ответ. 13%.
30. [8] Имеется 200 г сплава, содержащего золото и серебро в отношении 2 : 3. Сколько граммов серебра надо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 80% серебра? Ответ. 200 г.
31. [8] Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем цинка, а во втором — в 5 раз меньше, чем цинка. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы из них получился новый сплав, в котором цинка было бы в 2 раза больше, чем меди? Ответ. В 2 раза.
32. [6] Ручка до снижения цен стоила 30 р., а после снижения — 27 р. На сколько процентов снижена цена ручки? Ответ. На 10%.
33. [7] Антикварный магазин, купив два предмета за 22 500 р., продал их, получив 40% прибыли. За сколько рублей был куплен магазином каждый предмет, если на первом прибыли получено 25%, а на втором — 50%? Ответ. 9000 р. и 13 500 р.
34. [7] Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число. Ответ. 285 714.
35. [8] При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 7, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 4. При делении полученного неверного произведения на меньший множитель получилось в частном 52 и в остатке 26. Найти множители. Ответ. 34 и 41.
36. [8] Из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. После встречи пеше-

ход продолжил свой путь в пункт B , велосипедист же повернул назад и тоже поехал в пункт B . Пешеход, вышедший из пункта A , пришёл в пункт B на t ч позже велосипедиста. Сколько времени прошло до встречи, если известно, что скорость пешехода в k раз меньше скорости велосипедиста? Ответ. $\frac{t}{k-1}$ ч.

37. [8] От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, с массой m кг и n кг, было отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Найти массу каждого из отрезанных кусков. Ответ. $\frac{mn}{m+n}$ кг.
38. [8] Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта A , едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый велосипедист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии a км от пункта B , затем, достигнув пункта A и снова повернув обратно по направлению к пункту B , встречает второго велосипедиста, пройдя k -ю часть расстояния от A до B . Найти расстояние между пунктами A и B . Ответ. $s = 2ak$ км.
39. [9] Пешеход и велосипедист отправляются одновременно из пункта A в пункт B . В пункте B велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 20 мин после начала движения. Не останавливаясь, велосипедист доезжает до пункта A , поворачивает обратно и догоняет пешехода через 10 мин после первой встречи. За какое время пешеход пройдёт путь от пункта A до пункта B ? Ответ. За 1 ч.
40. [9] Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 ч из пункта A выехал велосипедист, а ещё через 30 мин из того же пункта выехал мотоциклист. Все участники движения перемещались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B . На сколько минут раньше пешехода прибыл в пункт B велосипедист, если пешеход прибыл туда на 1 ч позже мотоциклиста? Ответ. На 48 мин.
41. [9] Автомобилист и велосипедист, выехавшие одновременно навстречу друг другу соответственно из пунктов A и B , совершают безостановочное движение между этими пунктами. Доехав до пункта B и повернув назад, автомобилист догнал велосипедиста через 2 ч после их первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал вело-

сипедист до пункта A , если к тому моменту, когда его обогнал автомобилист, он проехал $\frac{2}{5}$ пути от B до A ? Ответ.

8 ч 45 мин.

42. [9] Два велосипедиста движутся по кольцевой велотрассе длины s , $\frac{1}{5}$ часть которой проходит по стадиону, а оставшаяся часть — по городским улицам. Скорость первого велосипедиста на стадионе равна v , а на городских улицах равна $\frac{16}{3}v$. Скорость второго велосипедиста на стадионе равна $4v$, а на городских улицах $\frac{16}{5}v$. Велосипедисты одновременно въезжают на стадион. Через какое время после этого один из них впервые совершит обгон другого? Ответ. Через $\frac{23s}{15v}$.

§ 1. Целые и рациональные числа

Справочные сведения

Рациональными называют числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число.

Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Примеры с решениями

Представить бесконечную периодическую дробь:

1) $0,(2)$; 2) $0,(35)$; 3) $-3,11(5)$; 4) $1,2(31)$

в виде обыкновенной.

Решение.

$$1) x = 0,(2), 10x = 2,(2), 10x - x = 2,(2) - 0,(2), 9x = 2, x = \frac{2}{9}.$$

$$2) x = 0,(35), 100x = 35,(35), 99x = 35, x = \frac{35}{99}.$$

$$3) x = -3,11(5), 100x = -311,(5), 1000x = -3115,(5), \\ 900x = -2804, x = -\frac{2804}{900} = -\frac{701}{225} = -3\frac{26}{225}.$$

$$4) x = 1,2(31), 10x = 12,(31), 1000x = 1231,(31), \\ 990x = 1219, x = \frac{1219}{990} = 1\frac{229}{990}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [3] Какое из чисел $\frac{1}{3}$, $15\frac{2}{7}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{18}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби?
2. [3] Выяснить, какую из дробей $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{13}{7}$, $\frac{3}{25}$ можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, период которой равен 7.

Выписать предложение и закончить его таким образом, чтобы высказывание стало истинным (3—5).

3. [2] Натуральное число делится на 3, если _____
4. [2] Натуральное число делится на 5, если _____

5. [2] Каждое натуральное число можно записать в виде бесконечной периодической дроби с периодом _____

Представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной (6—9).

6. [3] 1,(4). 7. [3] 0,(13). 8. [4] -3,1(7). 9. [4] 0,12(15).

Вариант II

1. [3] Какое из чисел $13\frac{2}{9}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{28}$, $1\frac{9}{40}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби?
2. [3] Выяснить, какую из дробей $\frac{24}{5}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{3}{32}$ можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, период которой равен 5.

Выписать предложение и закончить его таким образом, чтобы высказывание стало истинным (3—5).

3. [2] Натуральное число делится на 4, если _____
4. [2] Натуральное число делится на 9, если _____
5. [2] Каждое целое число можно записать в виде бесконечной периодической дроби с периодом _____

Представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной (6—9).

6. [3] 2,(8). 7. [3] -0,(15). 8. [4] 4,2(6). 9. [4] 0,15(13).

§ 2. Действительные числа

Справочные сведения

Иррациональным числом называется бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т. е. дробь вида

$$+a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \text{ или } -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

где a_0 — целое неотрицательное число, а каждая из букв $a_1, a_2, a_3, \dots$ — это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Пусть $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — последовательные приближения действительного числа x с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. Тогда погрешность приближения $|x - x_n|$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к 0, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x - x_n| = 0$, а это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Все правила действий над рациональными числами сохраняются и для действительных чисел.

Примеры с решениями

Показать на числовой прямой точку с координатой:

1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{7}$.

Решение.

1) $(\sqrt{13})^2 = 2^2 + 3^2$.

$\sqrt{13}$ — длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3. Построим такой треугольник в координатной плоскости (рис. 12).

2) $(\sqrt{7})^2 + 3^2 = 4^2$.

$\sqrt{7}$ — длина катета прямоугольного треугольника с гипотенузой 4 и вторым катетом 3.

Построим прямоугольник со сторонами 2 и $\sqrt{3}$, тогда длина его диагонали составит $\sqrt{7}$ (рис. 13).

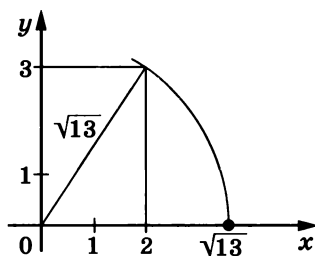


Рис. 12

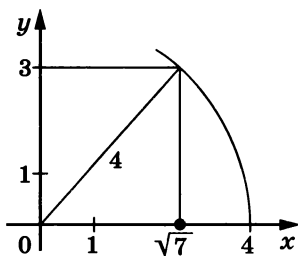


Рис. 13

Сравнить числовые значения выражений

$$\sqrt{3,9} + \sqrt{8,8} \text{ и } \sqrt{1,2} + \sqrt{16,2}.$$

Решение. Выясним, между какими соседними целыми числами находится каждое слагаемое:

$$\sqrt{1} < \sqrt{3,9} < \sqrt{4}, \quad 1 < \sqrt{3,9} < 2; \quad \sqrt{4} < \sqrt{8,8} < \sqrt{9}, \quad 2 < \sqrt{8,8} < 3.$$

Сложив почленно неравенства одинакового смысла, получим $3 < \sqrt{3,9} + \sqrt{8,8} < 5$.

$\sqrt{1} < \sqrt{1,2} < \sqrt{4}, \quad 1 < \sqrt{1,2} < 2; \quad \sqrt{16} < \sqrt{16,2} < \sqrt{25}, \quad 4 < \sqrt{16,2} < 5,$
откуда $5 < \sqrt{1,2} + \sqrt{16,2} < 7$. Следовательно,

$$\sqrt{1,2} + \sqrt{16,2} > \sqrt{3,9} + \sqrt{8,8}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [1] Подчеркнуть числа, которые являются иррациональными:

$$0,7(38); \quad 1\frac{3}{4}; \quad 1,171(131); \quad \pi; \quad \sqrt{2}.$$

2. [2] Какому из отрезков $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[4; 5]$, $[5; 6]$ принадлежит точка с координатой $\sqrt{28}$?
 3. [3] Какому из отрезков $[0; 1]$, $[2; 3]$, $[3; 4]$, $[4; 5]$ принадлежит точка с координатой, заданной суммой $\sqrt{3} + 3$?
 4. [5] Показать на числовой прямой точку с координатой $\sqrt{11}$.
- Выяснить, каким числом — рациональным или иррациональным — является значение выражения (5—8).
5. [2] $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$.
 6. [3] $\sqrt{5}(\sqrt{45} + 3) - (\sqrt{45} + 2)$.
 7. [6] $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$.
 8. [7] $\sqrt{14 - 4\sqrt{10}} + \sqrt{49 - 12\sqrt{10}}$.
 9. [8] Сравнить значения выражений $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ и $\sqrt{13 - 2\sqrt{30}}$.

Вариант II

1. [1] Подчеркнуть числа, которые являются иррациональными:
 $3,1(75)$; $1\frac{1}{7}$; $0,145(147)$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{\pi}$.
 2. [2] Какому из отрезков $[2; 3]$, $[3; 4]$, $[5; 6]$, $[7; 8]$ принадлежит точка с координатой $\sqrt{11}$?
 3. [3] Какому из отрезков $[2; 3]$, $[4; 5]$, $[6; 7]$, $[7; 8]$ принадлежит точка с координатой, заданной суммой $5 + \sqrt{5}$?
 4. [5] Показать на числовой прямой точку с координатой $\sqrt{12}$.
- Выяснить, каким числом — рациональным или иррациональным — является значение выражения (5—8).
5. [2] $(\sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{6} + \sqrt{7})$.
 6. [3] $(\sqrt{75} - 3) - \sqrt{5}(\sqrt{15} - \sqrt{5})$.
 7. [6] $\sqrt{16 + 6\sqrt{5}}$.
 8. [7] $\sqrt{12 - 2\sqrt{11}} + \sqrt{60 - 14\sqrt{11}}$.
 9. [8] Сравнить значения выражений $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ и $\sqrt{22 - 2\sqrt{45}}$.

§ 3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Справочные сведения

Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Если $|a| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

Примеры с решениями

Выяснить, является ли последовательность, заданная формулой $b_n = 2(-3)^{-n}$ своего n -го члена, бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Решение. Докажем, что последовательность является геометрической прогрессией, знаменатель которой имеет модуль, меньший 1. Для этого рассмотрим частное

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2 \cdot (-3)^{-(n+1)}}{2(-3)^{-n}} = (-3)^{-(n+1)+n} = (-3)^{-1} = -\frac{1}{3} = q.$$

Так как $\left| -\frac{1}{3} \right| < 1$, то последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = \frac{3}{4}$, $b_6 = \frac{3}{32}$.

Решение. Так как $S = \frac{b_1}{1-q}$, найдём b_1 и q , используя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$. По условию $b_3 = \frac{3}{4}$, $b_6 = \frac{3}{32}$, т. е. можно составить систему уравнений
$$\begin{cases} b_3 = b_1 q^2, \\ b_6 = b_1 q^5; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{4} = b_1 q^2, \\ \frac{3}{32} = b_1 q^5. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое почленно, получим $q^3 = \frac{1}{8}$, $q = \frac{1}{2}$. Из первого уравнения $b_1 = \frac{3}{4} : \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 3$.

По формуле найдём $S = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$.

Ответ. 6.

Записать бесконечную периодическую десятичную дробь $1,1(3)$ в виде обыкновенной.

Решение. Число $1,1(3)$ можно записать в виде суммы

$$1 \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \dots$$

Сумма слагаемых, начиная со второго, является суммой S бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1 = \frac{3}{100}$, $q = \frac{1}{10}$, следовательно,

$$S = \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{100} : \frac{9}{10} = \frac{1}{30}, \text{ откуда } 1,1(3) = 1 \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = 1 \frac{4}{30} = 1 \frac{2}{15}.$$

Ответ. $1,1(3) = 1 \frac{2}{15}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [2] Выяснить, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n -го члена: $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$.
2. [4] Выяснить, является ли бесконечно убывающей геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n -го члена: $b_n = 3^{n-1} \cdot 7^{2-n}$.

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (3—5).

3. [2] $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = -\frac{1}{2}$. 4. [3] $\frac{3}{2}$; 1 ; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; ... 5. [5] $b_3 = \frac{2}{3}$, $b_6 = \frac{2}{81}$.

Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной (6—8).

6. [4] 1,(5). 7. [5] 0,01(2). 8. [6] 4,12(35).

Вариант II

1. [2] Выяснить, является ли последовательность, заданная формулой n -го члена, геометрической прогрессией: $x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{3n}$.
2. [4] Выяснить, является ли последовательность, заданная формулой n -го члена, бесконечно убывающей геометрической прогрессией: $b_n = 2^{1+n} \cdot 5^{1-n}$.

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (3—5).

3. [2] $b_1 = \frac{5}{9}$, $q = \frac{1}{5}$. 4. [3] $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{56}$; ... 5. [5] $b_2 = -1$, $b_5 = \frac{27}{125}$.

Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной (6—8).

6. [4] 2,(8). 7. [5] 3,02(3). 8. [6] 5,21(28).

§ 4. Арифметический корень натуральной степени

Справочные сведения

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a .

Корень уравнения $x^{2k+1} = a$ при $a < 0$, $k \in N$ называют корнем нечётной степени из отрицательного числа. При $a < 0$

$${}^{2k+1}\sqrt{a} = -{}^{2k+1}\sqrt{-a} = -{}^{2k+1}\sqrt{|a|}.$$

Если $a \geq 0$, $b > 0$, n и m — натуральные числа, причём $n \geq 2$, $m \geq 2$, то выполняются свойства:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}; & 2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \\ 3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; & 4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \end{array}$$

5) Если a — любое действительное число и $k \in N$, то $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Примеры с решениями

Вычислить: 1) $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[5]{0,00001}$; 2) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; 3) $\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$.

Решение.

$$1) \sqrt[3]{-64} - \sqrt[5]{0,00001} = \sqrt[3]{(-4)^3} - \sqrt[5]{(0,1)^5} = -4 - 0,1 = -4,1;$$

$$2) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3;$$

$$3) \sqrt[3]{1\frac{61}{64}} = \sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

Упростить $\sqrt[4]{(x-6)^4} - \sqrt{(5-x)^2}$ при $x \leq 5$.

Решение. $\sqrt[4]{(x-6)^4} - \sqrt{(5-x)^2} = |x-6| - |5-x|$.

Так как $x \leq 5$, то $|x-6| = -(x-6) = 6-x$, $|5-x| = 5-x$, тогда $|x-6| - |5-x| = 6-x - (5-x) = 6-x-5+x = 1$.

Упростить выражение при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, $b \neq 1$.

$$1) \frac{\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{ab}} : \sqrt[4]{\frac{b}{a}}; \quad 2) \frac{\sqrt[5]{b}}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}} + \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}}.$$

Решение.

$$1) \frac{\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{ab}} : \sqrt[4]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}} : \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} + 1) \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}(1 - \sqrt[4]{b}) \cdot \sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[4]{a} + 1}{1 - \sqrt[4]{b}};$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{\sqrt[5]{b}}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}} + \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}} &= \frac{\sqrt[5]{b}(\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}) + \sqrt[5]{a}(\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b})}{(\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b})(\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})} = \\ &= \frac{\sqrt[5]{ab} + \sqrt[5]{b^2} + \sqrt[5]{a^2} - \sqrt[5]{ab}}{(\sqrt[5]{a})^2 - (\sqrt[5]{b})^2} = \frac{\sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}}. \end{aligned}$$

Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

Решение. Умножив числитель и знаменатель на $(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{5} \neq 0$, получим

$$\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{((1 + \sqrt{3}) - \sqrt{5})(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{(1 + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2\sqrt{3} - 1}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $2\sqrt{3} + 1 \neq 0$, получим

$$\frac{(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} + 1)}{(2\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{2\sqrt{15} + \sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 7}{11}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить (1—8).

1. $\boxed{2} \sqrt[3]{125}.$

2. $\boxed{2} \sqrt[4]{0,0001}.$

3. $\boxed{2} \sqrt{-32}.$

4. $\boxed{3} \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}.$

5. $\boxed{4} \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}.$

6. $\boxed{5} \sqrt[3]{9 \cdot 24}.$

7. $\boxed{4} \sqrt[3]{\frac{625}{5}}.$

8. $\boxed{5} \sqrt[5]{6^{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15}}.$

Найти числовое значение выражения (9—12).

9. $\boxed{5} \sqrt[3]{\sqrt{0,000001}} \cdot \sqrt{\sqrt{256}}.$

10. $\boxed{5} (4\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2^2})^6 : \sqrt[4]{3^6}.$

11. $\boxed{5} (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}).$

12. $\boxed{6} \sqrt[3]{4 - \sqrt[3]{37}} \cdot \sqrt[3]{16 + 4\sqrt[3]{37} + \sqrt[3]{37^2}}.$

При каких значениях x имеет смысл выражение (13—16)?

13. $\boxed{3} \sqrt[3]{x - 3}.$

14. $\boxed{3} \sqrt[6]{x + 2}.$

15. $\boxed{4} \sqrt[4]{x^2 - 3x - 4}.$

16. $\boxed{5} \sqrt[8]{\frac{x - 3}{2 - x}}.$

Упростить выражение (17—20).

17. $\boxed{5} \sqrt[5]{y^3 \cdot \sqrt[4]{y^8}}.$

18. $\boxed{5} \sqrt[4]{y^2 \cdot \sqrt[3]{y^6}}.$

19. $\boxed{4} \sqrt[5]{(2 + x)^5}.$

20. $\boxed{4} \sqrt[4]{(x - 5)^4}.$

Упростить выражение при заданных значениях x (21—24).

21. $\boxed{5} \sqrt[9]{(8 - x)^9}$ при $x > 8$.

22. $\boxed{5} \sqrt[4]{(2x + 5)^4}$ при $x < -2,5$.

23. $\boxed{6} \sqrt{(x - 3)^2} + \sqrt[4]{(4 + x)^4}$ при $x > 4$.

24. $\boxed{7} \sqrt[4]{(3x + 5)^4} - \sqrt[6]{(2x - 7)^6}$ при $-1 \leq x \leq 0$.

Верно ли равенство (25—28)?

25. $\boxed{6} \sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$, если $a < 0$.

26. $\boxed{6} \sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$, если $a \geq 0$.

27. $\boxed{7} \sqrt[4]{(x - 1)^2} = \sqrt{1 - x}$, если $x < 1$.

28. $\boxed{7} \sqrt[6]{(2 - x)^2} = \sqrt[3]{2 - x}$, если $x > 2$.

Сократить дробь, если $a > 0$, $a \neq 1$ (29—34).

29. [6] $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}.$

30. [5] $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}.$

31. [5] $\frac{\sqrt[4]{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}.$

32. [6] $\frac{1 - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} - 1}.$

33. [6] $\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt[6]{a} - 1}.$

34. [6] $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{a} + 1}{\sqrt{a} + 1}.$

Найти сумму или разность ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$) (35—37).

35. [6] $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}.$

36. [6] $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} + \frac{1 - \sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}}.$

37. [7] $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{a}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$

Выполнить деление ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, $a \neq 2b$) (38—40).

38. [7] $\frac{\sqrt[6]{ab} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} : \frac{\sqrt[6]{ab}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}.$

39. [7] $(\sqrt[3]{4a^2} - \sqrt[3]{9b^2}) : (\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{3b}).$

40. [7] $(\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{16ab^2} + \sqrt[3]{4b^3}) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2b}).$

41. [8] Доказать тождество $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$
при $a > 0$, $b > 0$, $a^2 - b > 0$.

42. [8] Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби
$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}}.$$

Вариант II

Вычислить (1—8).

1. [2] $\sqrt[3]{0,064}.$

2. [2] $\sqrt[4]{81}.$

3. [2] $\sqrt[7]{-128}.$

4. [3] $\sqrt[3]{1\frac{91}{125}}.$

5. [4] $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}.$

6. [5] $\sqrt[5]{48 \cdot 162}.$

7. [4] $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt[7]{256}}.$

8. [5] $\sqrt[7]{3^{21} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{14}}.$

Найти числовое значение выражения (9—12).

9. [5] $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{729}.$

10. [5] $(\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{2^2})^6 : \sqrt[3]{8^2}.$

11. [5] $(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}).$

12. [6] $\sqrt[3]{9 - 3\sqrt[3]{37} + \sqrt[3]{37^2}} \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{37}}.$

При каких значениях x имеет смысл выражение (13—16)?

13. [3] $\sqrt[5]{5 - x}.$

14. [3] $\sqrt[4]{3 + x}.$

15. [4] $\sqrt[6]{-x^2 + 5x - 6}.$

16. [5] $\sqrt[10]{\frac{6 - x}{x + 6}}.$

Упростить выражение (17—20).

17. [5] $\sqrt[3]{y\sqrt{y^4}}$. 18. [5] $\sqrt[6]{y^4 \cdot \sqrt[5]{y^{10}}}$.

19. [4] $\sqrt[7]{(3-x)^7}$. 20. [4] $\sqrt[8]{(x+7)^8}$.

Упростить выражение при заданных значениях x (21—24).

21. [5] $\sqrt[4]{(11+x)^{11}}$ при $x < -11$. 22. [5] $\sqrt[6]{(1+3x)^6}$ при $x \geq -\frac{1}{3}$.

23. [6] $\sqrt[4]{(5+x)^4} - \sqrt[6]{(x-1)^6}$ при $x < -6$.

24. [7] $\sqrt[6]{(4+5x)^6} - \sqrt[4]{(7x-1)^4}$ при $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

Верно ли равенство (25—28)?

25. [6] $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$, если $a < 0$. 26. [6] $\sqrt[8]{a^4} = \sqrt{a}$, если $a \geq 0$.

27. [7] $\sqrt[4]{(x-2)^2} = \sqrt{2-x}$, если $x < 2$.

28. [7] $\sqrt[8]{(3-x)^4} = \sqrt{3-x}$, если $x > 3$.

Сократить дробь, если $a > 0$, $a \neq 1$ (29—34).

29. [6] $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[9]{a}}$. 30. [5] $\frac{\sqrt[4]{a} - \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}$. 31. [5] $\frac{1 - \sqrt[4]{a}}{1 - \sqrt{a}}$.

32. [6] $\frac{1 - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[9]{a} + 1}$. 33. [6] $\frac{\sqrt[6]{a} + 1}{\sqrt{a} + 1}$. 34. [6] $\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a} + 1}$.

Найти сумму или разность ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$) (35—37).

35. [6] $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} - \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}$. 36. [6] $\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1 - \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$.

37. [7] $\frac{b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} + \frac{\sqrt[6]{b^5}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$.

Выполнить деление ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, $a \neq \frac{4}{5}b$) (38—40).

38. [7] $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{ab}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} : \frac{\sqrt[6]{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt[6]{b}}$.

39. [7] $(\sqrt[3]{25a^2} - \sqrt[3]{16b^2}) : (\sqrt[3]{5a} - \sqrt[3]{4b})$.

40. [7] $(b\sqrt{8b} - a\sqrt{a}) : (2b + \sqrt{2ab} + a)$.

41. [8] Доказать тождество $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$
при $a > 0$, $b > 0$, $a^2 - b > 0$.

42. [8] Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{14\sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}$.

§ 5. Степень с рациональным и действительным показателями

Справочные сведения

Определения

Если m — целое число, n — натуральное число, то:

$$1) a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ раз}}; \quad a^1 = a; \quad 2) a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0);$$

$$3) a^0 = 1 \quad (a \neq 0); \quad 4) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, n \geq 2).$$

Если $r > 0$, то $0^r = 0$.

Свойства

Пусть $a > 0$, $b > 0$; x, x_1, x_2 — действительные числа.

$$1^0. a^x > 0. \quad 2^0. \text{ Если } a > 1 \text{ и } x > 0, \text{ то } a^x > 1.$$

$$3^0. \text{ Если } a > 1 \text{ и } x_1 < x_2, \text{ то } a^{x_1} < a^{x_2}.$$

$$4^0. \text{ Если } 0 < a < 1 \text{ и } x_1 < x_2, \text{ то } a^{x_1} > a^{x_2}.$$

$$5^0. \text{ Если } a^{x_1} = a^{x_2}, \text{ где } a \neq 1, \text{ то } x_1 = x_2.$$

$$6^0. \text{ Если } 0 < x_1 < x_2 \text{ и } p > 0, \text{ то } x_1^p < x_2^p.$$

$$7^0. \text{ Если } 0 < x_1 < x_2 \text{ и } p < 0, \text{ то } x_1^p > x_2^p.$$

$$8^0. a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}. \quad 9^0. \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}.$$

$$10^0. (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}. \quad 11^0. (ab)^x = a^x b^x.$$

$$12^0. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Примеры с решениями

Вычислить: 1) 37^0 ; 2) $16^{-\frac{3}{4}}$.

Решение.

$$1) 37^0 = 1; \quad 2) 16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Представить в виде степени с основанием a выражение

$$(\sqrt[3]{a^2})^2 \cdot \sqrt[6]{a}.$$

$$\text{Решение. } \frac{aa^{-\frac{1}{6}}}{aa^{-\frac{1}{6}}} = \frac{(\sqrt[3]{a^2})^2 \cdot \sqrt[6]{a}}{a^{1 + \left(-\frac{1}{6}\right)}} = \frac{\left(\frac{a^2}{3}\right)^2 \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}} = \frac{a^{\frac{9}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{9}{6} - \frac{5}{6}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Выяснить, какое из чисел больше:

$$1) 0,1^{\frac{7}{8}} \text{ или } 0,1^{\frac{8}{9}}; \quad 2) 5^{-\frac{2}{3}} \text{ или } 5^{-\frac{3}{4}}.$$

Решение.

$$1) \text{ Сравним показатели степеней, т. е. числа } \frac{7}{8} \text{ и } \frac{8}{9}.$$

$$\text{Имеем } \frac{7}{8} = \frac{63}{72}, \frac{8}{9} = \frac{64}{72}. \text{ Так как } \frac{63}{72} < \frac{64}{72}, \text{ то } \frac{7}{8} < \frac{8}{9}. \text{ Основание}$$

обеих степеней $0,1 < 1$, т. е. $0,1^{\frac{7}{8}} > 0,1^{\frac{8}{9}}$ (свойство 4^0).

2) Имеем $-\frac{2}{3} = -\frac{8}{12}$, $-\frac{3}{4} = -\frac{9}{12}$, $-\frac{8}{12} > -\frac{9}{12}$, $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$. Так как основание $5 > 1$, то (по свойству 3^0) $5^{-\frac{2}{3}} > 5^{-\frac{3}{4}}$.

Сравнить числа: 1) $\sqrt[6]{7}$ и $\sqrt[6]{10}$; 2) $7^{-0,1}$ и $10^{-0,1}$.

Решение.

1) $\sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[6]{10} = 10^{\frac{1}{6}}$. Так как $0 < 7 < 10$ и $\frac{1}{6} > 0$, то $7^{\frac{1}{6}} < 10^{\frac{1}{6}}$ (по свойству 6^0) и, следовательно, $\sqrt[6]{7} < \sqrt[6]{10}$.

2) $0 < 7 < 10$, $-0,1 < 0$, т. е. $7^{-0,1} > 10^{-0,1}$ (свойство 7^0).

Упростить выражение $\frac{1 - a^{-\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a} + a^{-\frac{1}{2}}}{a - 1}$.

Решение. Преобразуем первую и вторую дроби:

$$\frac{1 - a^{-\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{a}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} \left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right)}; \quad \frac{\sqrt{a} + a^{-\frac{1}{2}}}{a - 1} = \frac{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}{a - 1} = \frac{a + 1}{a^{\frac{1}{2}} (a - 1)}.$$

Найдём разность получившихся дробей, разложив знаменатель второй дроби на множители:

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} \left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right)} - \frac{a + 1}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)} &= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 - (a + 1)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \\ &= \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}} + 1 - a - 1}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \frac{-2a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \frac{2}{1 - a}. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [2] Какому из промежутков $0 < a < 1$ или $a > 1$ принадлежит число a , если: 1) $a^{\frac{1}{3}} > 1$; 2) $a^{-5} > 1$?

Вычислить (2—8).

2. [1] $(-2)^4$. 3. [2] $\left(1\frac{3}{8}\right)^{-2}$. 4. [3] $8^{-\frac{2}{3}}$. 5. [4] $-2 \cdot 27^{\frac{1}{3}}$.

6. [4] $2^{-1} \cdot 64^{\frac{2}{3}}$. 7. [5] $\left(125^{-\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}} - 3\right)^{-\frac{1}{2}}$.

8. [5] $(3^{0,5} - 5^{0,5})^2 : ((2 - 15^{0,25})(2 + 15^{0,25}))$.

Представить в виде степени с основанием $a > 0$ (9—13).

9. [4] $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$. 10. [4] $\sqrt[6]{a} : \sqrt[8]{a^{-5}}$. 11. [4] $(\sqrt[3]{a^2})^6$.

12. [4] $a^{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt[4]{a}$. 13. [4] $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$.

Выполнить действия ($a > 0, b > 0$) (14—15).

14. [5] $(a^3\sqrt{a^2b})^3$.

15. [6] $6ab^9\sqrt{a^8b^3} : \frac{2a^6\sqrt{a^2b^5}}{3b}$.

При каких значениях a равенство верно (16—19)?

16. [4] $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

17. [4] $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

18. [5] $\sqrt[7]{(a-1)^5} = (a-1)^{\frac{5}{7}}$.

19. [5] $\sqrt[5]{(a+2)^{-3}} = (a+2)^{-\frac{3}{5}}$.

Сравнить числа (20—22).

20. [2] $7,1^{-2,5}$ и $7,1^{-2\frac{1}{3}}$.

21. [2] $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$.

22. [3] $(1,03)^{-5}$ и 1.

Решить уравнение (23—24).

23. [4] $6^{2x} = \sqrt[3]{36}$.

24. [4] $\sqrt[5]{\frac{1}{4}} = 8^x$.

25. [5] Зная, что $1,2^x = 3$, найти $1,2^{3x+1}$.

Сравнить числа (26—28).

26. [4] $\sqrt[5]{3}$ и $\sqrt[5]{6}$.

27. [4] $(0,35)^{\frac{3}{7}}$ и $(0,356)^{\frac{3}{7}}$.

28. [4] 35^{-17} и 36^{-17} .

Выполнить действия ($a > 1, b > 0, a \neq b$) (29—32).

29. [5] $\left(2a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(2a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{4}}\right)$.

30. [6] $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$.

31. [7] $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a} + a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}}$.

32. [7] $\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}$.

33. [7] Вычислить значение выражения $\left(a^{2x} + \frac{1}{a^{2x}}\right) \cdot b^{\frac{2x}{3}}$ при $a^x + \frac{1}{a^x} = 4, b^x = 8$.

Сравнить с 1 числа (34—35).

34. [3] $3^{\sqrt{2}}$.

35. [3] $(0,7)^\pi$.

Сравнить числа (36—39).

36. [4] $(2,71)^{\sqrt{3}}$ и $(2,701)^{\sqrt{3}}$.

37. [4] $(0,44)^{-\pi}$ и $(0,(4))^{-\pi}$.

38. [4] $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

39. [4] $2^{-\sqrt{5}}$ и $2^{-\sqrt{3}}$.

Выполнить действия ($a > 0$) (40—43).

40. [3] $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$.

41. [3] $a^{\sqrt{2}} \cdot a^3$.

42. [3] $(a^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}$.

43. [3] $\frac{a^\pi (a^{\pi+1})}{a^{1-\pi}}$.

Упростить выражение (44—45).

44. [8] $\left(\frac{2a + b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}}{3a} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right).$

45. [9] $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$, если $a > 0$, $b > 0$ и $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$

Вариант II

1. [2] Какому из промежутков $0 < a < 1$ или $a > 1$ принадлежит число a , если: 1) $a^{-8,5} < 1$; 2) $a^{\frac{4}{3}} < 1$?

Вычислить (2—8).

2. [1] $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$. 3. [2] $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$. 4. [3] $25^{-1\frac{1}{2}}$. 5. [4] $3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$.

6. [4] $3^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$. 7. [5] $\left(16^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right)^{-2}$.

8. [5] $(16^{-0,25} - 3^{-0,5}) \left(16^{-0,25} + \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right).$

Представить в виде степени с основанием $a > 0$ (9—13).

9. [4] $\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[10]{a^7}$. 10. [4] $\sqrt[8]{a^7} : \sqrt[4]{a^{-3}}$. 11. [4] $(\sqrt[4]{a^3})^8$.

12. [4] $a^{\frac{1}{15}} \cdot \sqrt[5]{a}$. 13. [4] $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$.

Выполнить действия ($a > 0$, $b > 0$) (14—15).

14. [5] $\left(\frac{1}{a} \sqrt[4]{ab}\right)^8$. 15. [6] $ab^6 \sqrt[6]{81a^5b} \cdot \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3ab} \cdot b^3 \sqrt[3]{9ab^2}$.

При каких значениях a равенство верно (16—19)?

16. [4] $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$.

17. [4] $\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$.

18. [5] $\sqrt[5]{(3+a)^3} = (3+a)^{\frac{3}{5}}$.

19. [5] $\sqrt[7]{(1-a)^{-5}} = (1-a)^{-\frac{5}{7}}$.

Сравнить числа (20—22).

20. [2] $(0,2)^{-\frac{1}{3}}$ и $(0,2)^{-0,3}$.

21. [2] $9,7^{\frac{5}{6}}$ и $9,7^{\frac{6}{7}}$.

22. [3] 1 и $(0,283)^{-8}$.

Решить уравнение (23—24).

23. [4] $\sqrt[4]{27} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$.

24. [4] $7^{3x} = \sqrt[5]{49}$.

25. [5] Зная, что $0,7^x = 5$, найти $0,7^{2x+1}$.

Сравнить числа (26—28).

26. $\boxed{4}$ $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{0,1}$.

27. $\boxed{4}$ $(1,02)^{0,4}$ и $(1,021)^{0,4}$.

28. $\boxed{4}$ $18^{-1,8}$ и $19^{-1,8}$.

Выполнить действия ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$) (29—32).

29. $\boxed{5}$ $\left(a^{\frac{2}{3}} - 3b^{-1}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + 3b^{-1}\right)$.

30. $\boxed{6}$ $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

31. $\boxed{7}$ $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{(a^2(a-b)^2)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)}{(a-b)^{\frac{1}{3}}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$.

32. $\boxed{7}$ $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} + \frac{(1-a)\left(1-a^{-\frac{1}{2}}\right)}{1+\sqrt{a}}$.

33. $\boxed{7}$ Вычислить значение выражения $(a^{4x} - 4) : \left(b^{2x} + \frac{1}{b^{2x}}\right)$ при $a^{2x} = 5$, $b^x + \frac{1}{b^x} = 3$.

Сравнить с 1 числа (34—35).

34. $\boxed{3}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

35. $\boxed{3}$ $(1,07)^{\pi}$.

Сравнить числа (36—39).

36. $\boxed{4}$ $(0,37)^{\sqrt{3}}$ и $(0,307)^{\sqrt{3}}$.

37. $\boxed{4}$ $(0,(3))^{-\sqrt{5}}$ и $(0,3)^{-\sqrt{5}}$.

38. $\boxed{4}$ $(5,1)^{\sqrt{5}}$ и $(5,1)^{\sqrt{7}}$.

39. $\boxed{4}$ $(0,3)^{-\sqrt{2}}$ и $(0,3^{-\sqrt{5}})$.

Выполнить действия ($a > 0$) (40—43).

40. $\boxed{3}$ $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$.

41. $\boxed{3}$ $a^{\sqrt{3}} \cdot a^2$.

42. $\boxed{3}$ $(a^{1-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}+1}$.

43. $\boxed{3}$ $\frac{a^{\sqrt{5}}(a^{\sqrt{5}-1})}{a^{\sqrt{5}+1}}$.

Упростить выражение (44—45).

44. $\boxed{8}$ $\left(\frac{(1-x)^{\frac{1}{4}}}{2(1+x)^{\frac{3}{4}}} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$ при $-1 < x < 1$.

45. $\boxed{9}$ $\frac{(m+x)^{\frac{1}{2}} + (m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}} - (m-x)^{\frac{1}{2}}}$, если $m > 0$, $0 < n < 1$ и $x = \frac{2mn}{n^2+1}$.

Контрольная работа № 1

Вариант I

1. Вычислить:

$$1) \frac{\sqrt[3]{9} \cdot 3^5}{15^0 \cdot 27^2 \cdot 3^{-\frac{1}{3}}}; \quad 2) (\sqrt[3]{2\sqrt{16}})^2.$$

2. Известно, что $12^x = 3$. Найти 12^{2x-1} .

3. Выполнить действия ($a > 0, b > 0$):

$$1) a^{4+\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{a^{\sqrt{5}-1}} \right)^{\sqrt{5}+1}; \quad 2) \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}} - \sqrt[3]{b}.$$

4. Сравнить числа:

$$1) \left(\frac{2}{7} \right)^{\frac{3}{7}} \text{ и } \left(\frac{2}{7} \right)^{\frac{5}{7}}; \quad 2) (4,2)^{\sqrt{7}} \text{ и } \left(4\frac{2}{5} \right)^{\sqrt{7}}.$$

5. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь $0,2(7)$ в виде обыкновенной.

6. Упростить $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 2}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}}}$ при $a > 0, a \neq 1$.

Вариант II

1. Вычислить:

$$1) \frac{2^9 \cdot \sqrt[5]{16} \cdot 8^0}{4^4 \cdot 2^{-\frac{1}{5}}}; \quad 2) (\sqrt[3]{3\sqrt{81}})^2.$$

2. Известно, что $8^x = 5$. Найти 8^{-x+2} .

3. Выполнить действия ($a > 0, b > 0$):

$$1) (a^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a^{\sqrt{3}}}; \quad 2) \frac{\sqrt[5]{ab} - \sqrt[5]{b}}{\sqrt[5]{b}} - \sqrt[5]{a}.$$

4. Сравнить числа:

$$1) (0,7)^{-\frac{3}{8}} \text{ и } (0,7)^{-\frac{5}{8}}; \quad 2) (\pi)^{\sqrt{3}} \text{ и } (3,14)^{\sqrt{3}}.$$

5. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь $0,3(1)$ в виде обыкновенной.

6. Упростить $\left(\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{y}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}$ при $x > 0, y > 0$.

Задания для подготовки к экзамену

Упростить выражение (1—3).

1. [5] $\frac{\sqrt[4]{\frac{5}{8}} \cdot \sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{125}}$. Ответ. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. [6] $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$. Ответ. 8.

3. [5] $\frac{9m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{3}{2}}}{m^{-3}}$. Ответ. $9m^7$.

4. [6] Сократить дробь $\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}}$. Ответ. $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$.

5. [6] Найти значение выражения $\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - 3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}$, если $a = 81, b = 16$. Ответ. 4.

Задания для интересующихся математикой

Примеры с решениями

Упростить выражение

$$A = \sqrt{a+2} - 2\sqrt{a+1} + \sqrt{a+5} + 4\sqrt{a+1}.$$

Решение. Выражение имеет смысл при $a \geq -1$. Заметив, что

$$a+2 - 2\sqrt{a+1} = a+1 - 2\sqrt{a+1} + 1 = (\sqrt{a+1} - 1)^2,$$

и применив формулу $\sqrt{b^2} = |b|$, получим

$$A = |\sqrt{a+1} - 1| + \sqrt{a+1} + 2.$$

Если $\sqrt{a+1} \geq 1$, то $a \geq 0$, и тогда $A = 2\sqrt{a+1} + 1$. Если $0 \leq a+1 < 1$, т. е. $-1 \leq a < 0$, то $A = 1 - \sqrt{a+1} + \sqrt{a+1} + 2 = 3$.

$$\text{Ответ. } A = \begin{cases} 2\sqrt{a+1} + 1, & \text{если } a \geq 0, \\ 3, & \text{если } -1 \leq a < 0. \end{cases}$$

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}.$$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{2} = a$, тогда $a^3 = 2$,

$$A = \frac{1}{1 + a + 2a^2} = \frac{1}{a^2 + (1 + a + a^2)}.$$

Умножая числитель и знаменатель полученной дроби на $a - 1$ и применяя формулу разности кубов, запишем A так:

$$A = \frac{a-1}{a^2(a-1)+a^3-1} = \frac{a-1}{3-a^2} \text{ (учитывая, что } a^3=2\text{)}.$$

$$A = \frac{a-1}{3-a^2} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{3-\sqrt[3]{4}} = \frac{(\sqrt[3]{2}-1)(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{23} = \frac{7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}.$$

Доказать, что сумма квадратов двух нечётных чисел не может быть квадратом целого числа.

Решение. Если $a = 2n + 1$, $b = 2m + 1$, то $a^2 + b^2 = 4(n^2 + m^2 + n + m) + 2$, значит, $a^2 + b^2 = 2p$ и $a^2 + b^2$ не делится на 4. Если $a^2 + b^2 = k^2$, то $k = 2s$ и тогда $a^2 + b^2 = 4p$, что не выполняется.

Задания для самостоятельной работы

1. Упростить выражение:

а) $\frac{\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}}.$

Ответ. $\frac{1}{x}$, если $|x| \geq 1$; x , если $|x| < 1$.

б) $\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}.$

Ответ. $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, если $a > 2$; $\frac{2}{2-a}$, если $1 \leq a < 2$.

в) $\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}.$

Ответ. $2\sqrt{x+1}+1$, если $x \geq 0$; 3 , если $-1 \leq x < 0$.

2. Найти значение выражения:

а) $\sqrt{43+30\sqrt{2}}+\sqrt{43-30\sqrt{2}}.$ Ответ. 10 .

б) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$ Ответ. $\sqrt{2}$.

в) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}.$ Ответ. $\sqrt{2}-1$.

3. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}.$ Ответ. $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4).$

б) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}.$ Ответ. $\frac{7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}.$

4. Доказать равенство:

а) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4;$ б) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt{7-5\sqrt{2}}=2.$

5. Доказать, что число $a = 4n^3 + 6n^2 + 5n + 21$ делится на 3 при любом натуральном n .

6. Доказать, что число $a = 112^3 + 73$ делится на 37.

§ 6. Степенная функция, её свойства и график

Справочные сведения

Функция $y = x^p$	Область опреде- ления	Множество значений	Чётность, нечёт- ность	Возрас- тание	Убыва- ние
$p = 2n,$ $n \in \mathbf{N}$	$\mathbf{R}$	$y \geq 0$	чётная	$x \geq 0$	$x \leq 0$
$p = 2n - 1,$ $n \in \mathbf{N}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	нечётная	$x \in \mathbf{R}$	—
$p = -2n,$ $n \in \mathbf{N}$	$\mathbf{R},$ $x \neq 0$	$y > 0$	чётная	$x < 0$	$x > 0$
$p = -(2n - 1),$ $n \in \mathbf{N}$	$\mathbf{R},$ $x \neq 0$	$\mathbf{R},$ $y \neq 0$	нечётная	—	$x < 0,$ $x > 0$
$p > 0, p \in \mathbf{R},$ p — нецелое	$x \geq 0$	$y \geq 0$	—	$x \geq 0$	—
$p < 0, p \in \mathbf{R},$ p — нецелое	$x > 0$	$y > 0$	—	—	$x > 0$

Примеры с решениями

Изобразить схематически график функции и найти её область определения и множество значений:

1) $y = x^{\frac{3}{8}}$; 2) $y = x^{-\frac{1}{5}}$.

Решение.

1) $y = x^{\frac{3}{8}}, p = \frac{3}{8}, 0 < p < 1, p$ — не-

целое число. Область определения $x \geq 0$. Множество значений $y \geq 0$ (рис. 14).

2) $y = x^{-\frac{1}{5}}, p < 0, p$ — нецелое число. Область определения $x > 0$. Множество значений $y > 0$ (рис. 15).

Найти область определения функции:

1) $y = (x^3 + 1)^{\frac{2}{3}}$;

2) $y = (x^2 + 3x - 4)^{-6}$.

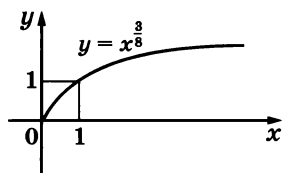


Рис. 14

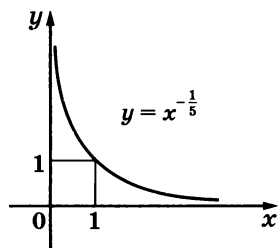


Рис. 15

Решение.

1) $y = (x^3 + 1)^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3} > 0, \frac{2}{3}$ — число нецелое. Область определения

$x^3 + 1 \geq 0$. Решим неравенство $(x + 1)(x^2 - x + 1) \geq 0, x^2 - x + 1 > 0$ при $x \in \mathbf{R}$, так как $a = 1$ и ветви параболы $y = x^2 - x + 1$ направлены вверх; $D = -3 < 0$, т. е. парабола не имеет пересечений с осью Ox . Следовательно, $(x + 1)(x^2 - x + 1) \geq 0$, если $x + 1 \geq 0, x \geq -1$.

Ответ. $x \geq -1$.

2) $y = (x^2 + 3x - 4)^{-6}$, -6 — чётное отрицательное число. Область определения $x^2 + 3x - 4 \neq 0$. Решим уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0, x_1 = -4, x_2 = 1$. Область определения $x \neq -4, x \neq 1$.

Среди функций

$$y = \sqrt[3]{x - 3}, y = x^6 - 3, y = (x - 3)^{-3}, y = (x - 3)^{-\frac{2}{5}}$$

назвать ту, множеством значений которой является множество действительных чисел, кроме 0.

Решение. Такой функцией является функция $y = (x - 3)^{-3}$, так как $-3 < 0, -3$ — число целое, нечётное; множеством значений является множество $\mathbf{R}$, кроме значений $(x - 3)^{-3} = 0$, т. е. $\frac{1}{(x - 3)^3} \neq 0, y \neq 0$ при всех $x \neq 3$. Множеством значений функции

$y = \sqrt[3]{x - 3}$ является множество $\mathbf{R}$; функции $y = x^6 - 3$ — множество чисел $y \geq -3$; функции $y = (x - 3)^{-\frac{2}{5}}$ — множество $y > 0$.

Ответ. $y = (x - 3)^{-3}$.

Выяснить, какая из функций: $y = x^{-4}$ или $y = x^{4,3}$ — является возрастающей на отрезке $[2; 3]$.

Решение. Отрезок $[2; 3]$ принадлежит лучу $x \geq 0$. Функция $y = x^{4,3}$ возрастает всюду на луче $x \geq 0$, следовательно, и на отрезке $[2; 3]$. Функция $y = x^{-4}$ убывает при $x > 0$, т. е. и на отрезке $[2; 3]$.

Ответ. $y = x^{4,3}$.

При каких значениях a уравнение $x^6 - 1 = a$ имеет действительные корни?

Решение.

I способ рассуждений. Множество значений функции $y = x^6 - 1$ — действительные числа $y \geq -1$. Графики функций $y = x^6 - 1$ и $y = a$ (рис. 16) имеют одну общую точку при $a = -1$, пересекаются в двух точках при $a > -1$. Следовательно, уравнение $x^6 - 1 = a$ имеет один корень при $a = -1$, два действительных корня при $a > -1$.

II способ рассуждений. Преобразуем уравнение $x^6 - 1 = a, x^6 = a + 1$.

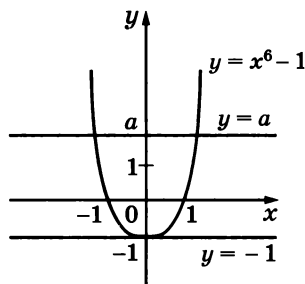


Рис. 16

Функция $y = x^6$ принимает только неотрицательные значения. Следовательно, для того, чтобы уравнение имело корни, должно выполняться $a + 1 \geq 0$, $a \geq -1$.

Ответ. При $a \geq -1$.

Построить график функции $y = \begin{cases} |(x-1)^3|, & \text{если } x \geq \frac{1}{2}, \\ |1 + (x-0,5)^{-1}|, & \text{если } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Решение. Если $x \geq \frac{1}{2}$, то график функции $y = |(x-1)^3|$ получается из графика функции $y = x^3$ сдвигом на единицу вправо вдоль оси Ox и отображением части полученного графика, лежащей ниже оси Ox , симметрично относительно оси Ox . Если $x < \frac{1}{2}$, то график функции $y = |1 + (x-0,5)^{-1}|$ получается сдвигом графика функции $y = x^{-1}$ на 0,5 единицы вдоль оси Ox вправо и на единицу вдоль оси Oy вверх и отображением части полученного графика, лежащей ниже оси Ox , симметрично относительно оси Ox (рис. 17).

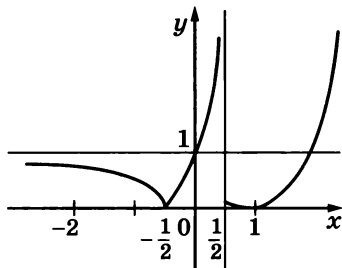


Рис. 17

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Изобразить схематически график функции (1—6).

1. [3] $y = x^{12}$.

2. [3] $y = x^{17}$.

3. [3] $y = x^{-4}$.

4. [3] $y = x^{0,35}$.

5. [3] $y = x^{-1,7}$.

6. [3] $y = x^{5-\pi}$.

Найти область определения и множество значений функции (7—15).

7. [3] $y = x^{22}$.

8. [3] $y = x^{15}$.

9. [4] $y = x^{-7}$.

10. [4] $y = x^{-18}$.

11. [4] $y = x^{\frac{1}{7}}$.

12. [4] $y = x^{-2\sqrt{2}}$.

13. [4] $y = x^{9-\sqrt{7}}$.

14. [4] $y = \sqrt[7]{x}$.

15. [4] $y = \sqrt[8]{x}$.

Является ли функция $y = x^p$ возрастающей или убывающей, если $x > 0$, а p равно (16—18):

16. [4] $\pi - 1$?

17. [5] $2 - \sqrt{2}$?

18. [5] $\sqrt{5} - 3$?

Сравнить значения функций $y = x^p$ (19—21).

19. [5] $3,1^{8,7}$ и $5,2^{8,7}$.

20. [5] $0,48^{0,1}$ и $0,75^{0,1}$.

21. [5] π^{-3} и $3,41^{-3}$.

Найти область определения функции (22—31).

22. [5] $y = (x - 2)^{\frac{1}{6}}$.

23. [5] $y = \sqrt[6]{x + 2}$.

24. [5] $y = (3 - x)^{\frac{1}{5}}$.

25. [5] $y = \sqrt[5]{3 - x}$.

26. [6] $y = (x^3 - x)^{-2}$.

27. [6] $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{-7}$.

28. [6] $y = \sqrt[5]{(x^2 - 4)^3}$.

29. [6] $y = (x^2 - 4)^{\frac{3}{5}}$.

30. [6] $y = (x^3 - x^2 - 6x)^{-\frac{3}{5}}$.

31. [6] $y = \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right)^{\sqrt{2}}$.

Найти множество значений функции (32—36).

32. [5] $y = (x - 2)^4$.

33. [5] $y = (x + 1)^{-5}$.

34. [6] $y = 3 + x^{\frac{2}{3}}$.

35. [6] $y = \sqrt[7]{x^2 - 3x}$.

36. [6] $y = \sqrt[4]{5x + x^2}$.

37. [5] Даны функции $y = 3x^{\frac{1}{3}}$, $y = 16x^{-3}$, $y = 5x^{-2}$, $y = 0,5x^{2,5}$, $y = x^{-5}$,
 $y = \frac{1}{7}x^8$, $y = x^\pi - 1$. Выписать функции, которые являются
чётными.

Выяснить, возрастает или убывает функция $y = f(x)$ на отрезке
[1; 2] (38—40).

38. [6] $y = x^2 + 2$.

39. [6] $y = -x^3 + 1$.

40. [6] $y = (x + 3)^{-2}$.

Изобразить схематически график функции $y = f(x)$. Найти её
область определения и множество значений, интервалы знакопо-
стоянства, промежутки возрастания (убывания) (41—46).

41. [6] $y = x^{14} + 1$.

42. [6] $y = (1 - x)^7$.

43. [6] $y = \sqrt[4]{x - 1}$.

44. [6] $y = x^{-5} + 2$.

45. [6] $y = \sqrt[3]{x + 1}$.

46. [6] $y = x^{\frac{1}{3}} - 1$.

При каких значениях a уравнение имеет один корень; два корня;
не имеет корней (47—49)?

47. [7] $(x + 3)^4 = a$.

48. [7] $2 - x^8 = a$.

49. [7] $x^{-4} + 1 = a$.

Решить графически уравнение (50—51).

50. [6] $\sqrt[3]{x + 1} = x + 1$.

51. [6] $\sqrt[5]{x} = x^{-5}$.

Построить график функции (52—54).

52. [7] $y = \sqrt[3]{|x| + 1}$.

53. [7] $y = |x - 2|^3$.

54. [7] $y = \left| x^{\frac{1}{3}} - 1 \right|$.

Найти значение функции (55—56).

55. [6] $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x + 2}, & \text{если } x \geq 3, \\ \frac{1}{x - 6}, & \text{если } x < 3, \end{cases}$ при $x_1 = 6$, $x_2 = -1,5$.

$$56. \boxed{6} y = \begin{cases} \sqrt{(x+3)^3}, & \text{если } x \geq -1, \\ \frac{3}{\sqrt[3]{2-x}}, & \text{если } x < -1, \end{cases} \quad \text{при } x_1 = 1, x_2 = -6.$$

$$57. \boxed{8} \text{ Построить график функции } y = \begin{cases} (|x| - 2)^{-2}, & \text{если } x > 1, \\ \sqrt[3]{x-1}, & \text{если } x \leq 1. \end{cases}$$

Вариант II

Изобразить схематически график функции (1—6).

$$1. \boxed{3} y = x^{28}.$$

$$2. \boxed{3} y = x^{29}.$$

$$3. \boxed{3} y = x^{-8}.$$

$$4. \boxed{3} y = x^{0,7}.$$

$$5. \boxed{3} y = x^{-3,5}.$$

$$6. \boxed{3} y = x^{3-\sqrt{2}}.$$

Найти область определения и множество значений функции (7—15).

$$7. \boxed{3} y = x^{16}.$$

$$8. \boxed{3} y = x^{17}.$$

$$9. \boxed{4} y = x^{-9}.$$

$$10. \boxed{4} y = x^{-20}.$$

$$11. \boxed{4} y = x^{\frac{1}{9}}.$$

$$12. \boxed{4} y = x^{-3\pi}.$$

$$13. \boxed{4} y = x^{5-\sqrt{3}}.$$

$$14. \boxed{4} y = \sqrt[9]{x}.$$

$$15. \boxed{4} y = \sqrt[6]{x}.$$

Является ли функция $y = x^p$ возрастающей или убывающей, если $x > 0$, а p равно (16—18):

$$16. \boxed{5} \pi - 2?$$

$$17. \boxed{5} 2 - \sqrt{3}?$$

$$18. \boxed{5} \sqrt{7} - 3?$$

Сравнить значения функций $y = x^p$ (19—21).

$$19. \boxed{5} 1,3^{5,1} \text{ и } 2,7^{5,1}.$$

$$20. \boxed{5} 8,5^{0,01} \text{ и } 10,5^{0,01}.$$

$$21. \boxed{5} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-0,3} \text{ и } \left(\frac{1}{3}\right)^{-0,3}.$$

Найти область определения функции (22—31).

$$22. \boxed{5} y = (x-5)^{\frac{1}{8}}.$$

$$23. \boxed{5} y = \sqrt[8]{x+3}.$$

$$24. \boxed{5} y = (x-2)^{\frac{1}{3}}.$$

$$25. \boxed{5} y = \sqrt[3]{x-2}.$$

$$26. \boxed{6} y = (x^4 - x^2)^{-4}.$$

$$27. \boxed{6} y = (x^3 + 3x^2 + 2x)^{-9}.$$

$$28. \boxed{6} y = \sqrt[7]{(9-x^2)^5}.$$

$$29. \boxed{6} y = (9-x^2)^{\frac{5}{7}}.$$

$$30. \boxed{6} y = (x^3 + x^2 - 12x)^{-\frac{5}{6}}.$$

$$31. \boxed{6} y = \left(\frac{x+3}{x-4}\right)^{\pi}.$$

Найти множество значений функции (32—36).

$$32. \boxed{5} y = (1+x)^8.$$

$$33. \boxed{5} y = (x-3)^{-7}.$$

$$34. \boxed{6} y = 5 + x^{\frac{1}{5}}.$$

$$35. \boxed{6} y = \sqrt[9]{3x^3 + 2x}.$$

$$36. \boxed{6} y = \sqrt[6]{x^2 - 3x}.$$

37. [5] Даны функции $y = 3x^{\frac{1}{3}}$, $y = 16x^{-3}$, $y = 5x^{-2}$, $y = 0,5x^{2,5}$,
 $y = x^{-5}$, $y = \frac{1}{7}x^8$, $y = x^\pi - 1$. Выписать функции, которые
являются нечётными.

Выяснить, возрастает или убывает функция $y = f(x)$ на отрезке
[1; 2] (38—40).

38. [6] $y = x^4 - 1$. 39. [6] $y = 2 - x^5$. 40. [6] $y = (2x - 1)^{-3}$.

Изобразить схематически график функции $y = f(x)$. Найти её
область определения и множество значений, интервалы знакопосто-
яинства, промежутки возрастания (убывания) (41—46).

41. [6] $y = (x + 1)^{14}$. 42. [6] $y = 1 - x^7$. 43. [6] $y = \sqrt[4]{x} - 1$.
44. [6] $y = (x + 2)^{-5}$. 45. [6] $y = 1 + \sqrt[3]{x}$. 46. [6] $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$.

При каких значениях a уравнение имеет один корень; два корня;
не имеет корней (47—49)?

47. [7] $(3 - x)^4 = a$. 48. [7] $x^8 + 2 = a$. 49. [7] $x^{-6} - 2 = a$.

Решить графически уравнение (50—51).

50. [6] $\sqrt[5]{x + 2} = x + 2$. 51. [6] $\sqrt[7]{x} = x^{-7}$.

Построить график функции (52—54).

52. [7] $y = \sqrt[3]{|x|} + 1$. 53. [7] $y = |2 + x|^5$.
54. [7] $y = \left| (x - 1)^{\frac{1}{5}} - 1 \right|$.

Найти значение функции (55—56).

55. [6] $y = \begin{cases} \sqrt[5]{5x - 3}, & \text{если } x \geq 2, \\ \frac{2}{(x + 3)^4}, & \text{если } x < 2, \end{cases}$ при $x_1 = 7$, $x_2 = -4$.
56. [6] $y = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt[3]{x + 15}}, & \text{если } x \geq -3, \\ \sqrt[4]{(1 - x)^2}, & \text{если } x < -3, \end{cases}$ при $x_1 = -15$, $x_2 = 49$.

57. [8] Построить график функции $y = \begin{cases} |(x + 2)^{-1}|, & \text{если } x \geq -3, \\ \sqrt[3]{2 - x}, & \text{если } x < -3. \end{cases}$

§ 7. Взаимно обратные функции

Справочные сведения

Для нахождения функции, обратной к функции $y = f(x)$,
нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это воз-
можно), а затем поменять местами x и y . Если это уравнение име-

ет более одного корня, то функции, обратной к функции $y = f(x)$, не существует.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Примеры с решениями

Найти функцию, обратную к функции $y = x^5 - 1$.

Решение. Решив уравнение $x^5 - 1 = y$ относительно x , находим $x = \sqrt[5]{y + 1}$. Заменяв x на y и y на x , получим формулу, задающую обратную функцию: $y = \sqrt[5]{x + 1}$.

На одном рисунке построить графики функции $y = -x^2 - 1$ при $x \geq 0$ и обратной к ней функции. Найти обратную функцию. Указать область определения и множество значений исходной и обратной к ней функций.

Решение. Строим график функции $y = -x^2 - 1$ при $x \geq 0$ и симметричный ему относительно прямой $y = x$ график обратной функции (рис. 18).

Для отыскания обратной функции выразим x через y : $x^2 = -y - 1$, откуда $x = \pm\sqrt{-y - 1}$; так как по условию $x \geq 0$, то $x = \sqrt{-y - 1}$. Заменяв x на y , а y на x , получаем формулу $y = \sqrt{-x - 1}$, задающую обратную функцию.

Для функции $y = -x^2 - 1$ задана область определения $x \geq 0$, тогда множество значений $y \leq -1$. Для функции $y = \sqrt{-x - 1}$ область определения $x \leq -1$, а множество значений $y \geq 0$.

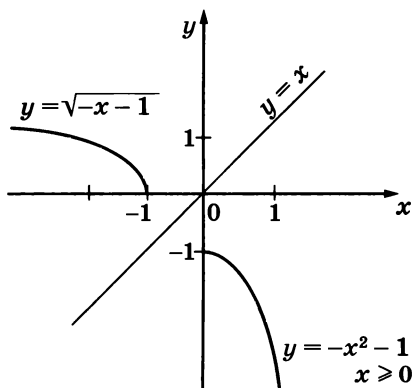


Рис. 18

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти функцию, обратную к данной; указать её область определения и множество значений (1—4).

1. [3] $y = -3x + 2$.
2. [4] $y = \frac{5}{2 - x}$.
3. [5] $y = 2 - x^3$.
4. [6] $y = \sqrt[3]{2x - 7}$.

На одном рисунке построить графики данной функции и функции, обратной к данной (5—7).

5. [4] $y = 2x + 1$.
6. [6] $y = -x^2 + 4$ при $x \geq 0$.
7. [6] $y = (x + 2)^2$ при $x \leq -2$.

Вариант II

Найти функцию, обратную к данной; указать её область определения и множество значений (1—4).

1. [3] $y = 2x - 3$.

2. [4] $y = \frac{7}{x-4}$.

3. [5] $y = 3 - x^5$.

4. [6] $y = \sqrt[5]{3x+1}$.

На одном рисунке построить графики данной функции и функции, обратной к данной (5—7).

5. [4] $y = -2x + 1$.

6. [6] $y = x^2 + 2$ при $x \leq 0$.

7. [6] $y = -(x+1)^2$ при $x \leq -1$.

§ 8. Равносильные уравнения и неравенства

Справочные сведения

Если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого.

Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются равносильными.

При решении уравнений можно:

1) заменять уравнение равносильным ему уравнением (без последующей проверки);

2) заменять уравнение его следствием (с проверкой на выявление посторонних корней).

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными.

Примеры с решениями

Выяснить, какое из уравнений: $(x-5)(x-3) = 0$ или $x-5 = 0$ — является следствием другого.

Решение. Первое уравнение имеет корни $x_1 = 5$ и $x_2 = 3$, а второе — единственный корень $x = 5$. Поэтому первое уравнение является следствием второго.

Выяснить, равносильны ли уравнения:

1) $3x - 3 = 0$ и $x - 1 = 0$;

2) $x^2 - x - 5 = 0$ и $x^2 = x + 5$;

3) $x^2 - 3x - 4 = 0$ и $x + 1 = 0$;

4) $\frac{x+2}{x-3} = 0$ и $(x+2)(x-3) = 0$.

Ответ. 1) Равносильны; 2) равносильны; 3) не равносильны (корни первого уравнения $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, корень второго $x = -1$); 4) не равносильны (корень первого уравнения $x = -2$, корни второго $x_1 = -2$, $x_2 = 3$).

Выяснить, равносильны ли неравенства:

1) $(x + 3)(x^2 + 2) < 0$ и $x + 3 < 0$;

2) $\frac{3x + 2}{x - 1} > 1$ и $3x + 2 > x - 1$;

3) $\frac{x + 3}{x - 4} > 0$ и $(x + 3)(x - 4) > 0$.

Решение. 1) Так как $x^2 + 2 > 0$ при всех действительных значениях x , то решение неравенства ищем среди решений неравенства $x + 3 < 0$, т. е. $x < -3$. Ответ. Равносильны.

2) Неравенство $\frac{3x + 2}{x - 1} > 1$ равносильно неравенству $\frac{3x + 2}{x - 1} - 1 > 0$, значит, и неравенству $\frac{3x + 2 - (x - 1)}{x - 1} > 0$, $\frac{2x + 3}{x - 1} > 0$. Решением этого неравенства являются промежутки $x < -\frac{3}{2}$, $x > 1$.

Решением неравенства $3x + 2 > x - 1$ является промежуток $x > -\frac{3}{2}$. Ответ. Не равносильны.

3) Решениями того и другого неравенства являются промежутки $x < -3$, $x > 4$. Ответ. Равносильны.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Выяснить, какое из двух данных уравнений является следствием другого (1—3).

1. $\boxed{3} x + 4 = 0$ и $(x - 1)(x + 4) = 0$.

2. $\boxed{4} x^2 + 3x - 10 = 0$ и $x - 2 = 0$.

3. $\boxed{5} x^2 - 4 = 0$ и $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$.

Записать какое-нибудь следствие уравнения (4—9).

4. $\boxed{3} 3x = 4$.

5. $\boxed{4} x^2 = 9$.

6. $\boxed{5} \frac{x - 5}{x - 3} = 0$.

7. $\boxed{5} \sqrt{x^2} = 3$.

8. $\boxed{6} \sqrt{x^2 - 7x + 2} = x + 1$.

9. $\boxed{3} x^2 + 1 = 0$.

Объяснить, почему данные уравнения равносильны (10—12).

10. $\boxed{3} 3x = 6$ и $3x + 2 = 8$.

11. $\boxed{3} 18x^2 - x = 3$ и $18x^2 = 3 + x$.

12. $\boxed{3} 5x = 20$ и $10(x - 4) = 0$.

Выяснить, равносильны ли уравнения (13—14).

13. $\boxed{3} 15x = 3$ и $5x - 1 = 0$.

14. $\boxed{4} x(x - 2) = 0$ и $x(x^2 + 2) = 0$.

Выяснить, равносильны ли неравенства (15—17).

15. $\boxed{4}$ $x + 5 > 0$ и $(x + 5)^2 > 0$. 16. $\boxed{5}$ $\frac{2x}{x+1} < 0$ и $2x < x + 1$.

17. $\boxed{5}$ $\frac{2x^2 + 1}{x - 2} > 1$ и $2x^2 + 1 > x - 2$.

18. $\boxed{7}$ Следствие некоторого уравнения имеет три корня. Сколько корней может быть у исходного уравнения?

Вариант II

Выяснить, какое из двух данных уравнений является следствием другого (1—3).

1. $\boxed{3}$ $2 - x = 0$ и $4 - x^2 = 0$. 2. $\boxed{4}$ $x^2 + x - 6 = 0$ и $x + 3 = 0$.

3. $\boxed{5}$ $9 - x^2 = 0$ и $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$.

Записать какое-нибудь следствие уравнения (4—9).

4. $\boxed{3}$ $5x = -7$.

5. $\boxed{4}$ $x^2 = 2$.

6. $\boxed{5}$ $\frac{x + 5}{x + 3} = 0$.

7. $\boxed{5}$ $\sqrt{(x - 3)^2} = 2$.

8. $\boxed{6}$ $\sqrt{x^2 - 6x + 5} = x + 2$.

9. $\boxed{3}$ $\frac{2}{5 - x} = 0$.

Объяснить, почему данные уравнения равносильны (10—12).

10. $\boxed{3}$ $2\frac{1}{3}x = 15$ и $7x = 45$. 11. $\boxed{3}$ $7x^2 - 5 = 2x$ и $7x^2 - 2x = 5$.

12. $\boxed{3}$ $10x = 3$ и $\frac{4x - 1,2}{5} = 0$.

Выяснить, равносильны ли уравнения (13—14).

13. $\boxed{3}$ $x^2 = 4$ и $(x - 2)(x + 2) = 0$.

14. $\boxed{4}$ $(x + 5)(x - 5) = 0$ и $(x + 5)^2 = 0$.

Выяснить, равносильны ли неравенства (15—17).

15. $\boxed{4}$ $x^2 + 9 > 0$ и $x + 9 > 0$. 16. $\boxed{5}$ $x(x + 3) < 0$ и $\frac{x}{x + 3} < 0$.

17. $\boxed{5}$ $\frac{(x - 2)^2}{x + 4} < 1$ и $(x - 2)^2 < x + 4$.

18. $\boxed{7}$ Следствие некоторого уравнения имеет два корня. Сколько корней может быть у исходного уравнения?

§ 9. Иррациональные уравнения

Справочные сведения

Иррациональное уравнение — это уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

Иррациональные уравнения часто решаются с помощью возведения обеих частей уравнения в одну и ту же натуральную степень.

При возведении обеих частей уравнения в нечётную степень получается уравнение, равносильное исходному.

При возведении обеих частей уравнения в чётную степень (в частности, в квадрат) могут появиться посторонние корни, поэтому в этом случае необходима проверка.

При решении иррациональных уравнений проверка не делается, если используются следующие утверждения:

- 1) уравнение вида ${}^{2k}\sqrt{f(x)} = g(x)$, где $k \in N$, равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2k}(x); \end{cases}$
- 2) уравнение вида ${}^{2k}\sqrt{f(x)} = {}^{2k}\sqrt{g(x)}$, где $k \in N$, равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \text{ (можно заменить на } g(x) \geq 0 \text{)}. \end{cases}$

Примеры с решениями

Решить уравнение $\sqrt{6-x} = x$.

Решение. I вариант оформления. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $6-x = x^2$, имеющее корни $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Проверка показывает, что $x = -3$ — посторонний корень.

Ответ. $x = 2$.

II вариант оформления. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 6-x = x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 6 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x_1 = -3, \quad x_2 = 2. \end{cases}$$

Ответ. $x = 2$.

Решить уравнение $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5}$.

Решение. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$x+6 - 2\sqrt{(x+6)(x+1)} + x+1 = 2x-5,$$

откуда $\sqrt{(x+6)(x+1)} = 6$.

После возведения обеих частей этого уравнения в квадрат и приведения подобных членов получим $x^2 + 7x - 30 = 0$. Это уравнение имеет корни $x_1 = -10$, $x_2 = 3$. Проверка показывает, что $x = -10$ — посторонний корень.

Ответ. $x = 3$.

Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3-19} = x-1$.

Решение. Возведя обе части уравнения в куб, получим

$$x^3 - 19 = (x-1)^3,$$

откуда $x^3 - 19 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $3x^2 - 3x - 18 = 0$. Это уравнение имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, которые являются корнями исходного уравнения.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить уравнение (1—12).

- | | |
|---|---|
| 1. $\boxed{4} \sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$. | 2. $\boxed{4} \sqrt{1-x} = x+1$. |
| 3. $\boxed{4} \sqrt{x+11} = x-1$. | 4. $\boxed{4} \sqrt{x^2+x+4} = 4$. |
| 5. $\boxed{5} \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$. | 6. $\boxed{5} \sqrt{5-x} - \sqrt{5+x} = 2$. |
| 7. $\boxed{5} \sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4$. | 8. $\boxed{5} \sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1$. |
| 9. $\boxed{5} \sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$. | |
| 10. $\boxed{6} \sqrt{5x-3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$. | |
| 11. $\boxed{4} \sqrt[3]{x^3-7} = 1$. | |
| 12. $\boxed{6} \sqrt[4]{17x^2-16} = x$. | |

Решить уравнение относительно x (13—15).

13. $\boxed{5} \sqrt{x} = a$. 14. $\boxed{6} \sqrt{x-1} = a$. 15. $\boxed{6} \sqrt{x} = 1+a$.

Выяснить с помощью графика, сколько корней имеет уравнение (16—18).

16. $\boxed{5} \sqrt{x} = 6 - x^2$. 17. $\boxed{6} \sqrt{x+1} = (x-1)^2$.
18. $\boxed{7} x^3 - 2 = \sqrt{x-1}$.

Решить уравнение (19—21).

19. $\boxed{7} \sqrt{6-4x-x^2} = x+4$. 20. $\boxed{7} x + \sqrt{2x^2-7x+5} = 1$.
21. $\boxed{8} 5\sqrt{x^2+5x+28} = x^2+5x+4$.

Вариант II

Решить уравнение (1—12).

- | | |
|---|---|
| 1. $\boxed{4} \sqrt{x+4} = \sqrt{2x-1}$. | 2. $\boxed{4} \sqrt{x+1} = 1-x$. |
| 3. $\boxed{4} \sqrt{x+10} = x-2$. | 4. $\boxed{4} \sqrt{x^2-x-3} = 3$. |
| 5. $\boxed{5} \sqrt{3x+4} - \sqrt{x} = 2$. | 6. $\boxed{5} \sqrt{12+x} - \sqrt{1-x} = 1$. |
| 7. $\boxed{5} \sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$. | 8. $\boxed{5} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+8} = 1$. |
| 9. $\boxed{5} \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$. | |
| 10. $\boxed{6} \sqrt{7x-5} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{4x-3}$. | |
| 11. $\boxed{4} \sqrt[3]{19-x^3} = 3$. | |
| 12. $\boxed{6} \sqrt[4]{13x^2-36} = x$. | |

Решить уравнение относительно x (13—15).

13. $\boxed{5} \sqrt{x} = -a$. 14. $\boxed{6} \sqrt{x+2} = a$. 15. $\boxed{6} \sqrt{x} + 3 = a$.

Выяснить с помощью графика, сколько корней имеет уравнение (16—18).

16. $\boxed{5} \sqrt{x} = 4 - x^2$. 17. $\boxed{6} \sqrt{x-1} = (x-2)^2$.
18. $\boxed{7} x^3 - 1 = \sqrt{x+1}$.

Решить уравнение (19—21).

19. $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$.

20. $\sqrt{2x^2+8x+7} = x+2$.

21. $\sqrt{x^2+2x+8} = 12-2x-x^2$.

§ 10. Иррациональные неравенства

Примеры с решениями

Решить неравенство $\sqrt{3-x} < -4$.

Решение. При всех значениях x из области определения неравенства ($x \leq 3$) левая часть неравенства неотрицательна. Поэтому $\sqrt{3-x}$ не может принимать значений, меньших -4 .

Ответ. Неравенство не имеет решений.

Решить неравенство $\sqrt{3-x} < 4$.

Решение. Неравенство имеет смысл, если $3-x \geq 0$, т. е. при $x \leq 3$. Если $x \leq 3$, то обе части неравенства неотрицательны и при возведении в квадрат обеих частей данного неравенства получается неравенство $3-x < 16$, откуда $x > -13$. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x \leq 3, \\ x > -13. \end{cases}$

Ответ. $-13 < x \leq 3$.

Решить неравенство $\sqrt{3-x} > 4$.

Решение. Если $3-x \geq 0$, т. е. $x \leq 3$, то обе части неравенства определены и неотрицательны. Поэтому при возведении в квадрат обеих частей данного неравенства получается неравенство $3-x > 16$, которое можно записать в виде $x < -13$. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x \leq 3, \\ x < -13. \end{cases}$

Ответ. $x < -13$.

Решить неравенство $\sqrt{3-x} > -4$.

Решение. Так как левая часть неравенства определена при $x \leq 3$ и неотрицательна, то данному неравенству удовлетворяют все значения x из его области определения.

Ответ. $x \leq 3$.

Решить неравенство $\sqrt{x+3} < x+1$.

Решение. Неравенство имеет смысл, если $x+3 \geq 0$, т. е. при $x \geq -3$. Как и при решении неравенств в примерах 2 и 3, попытаемся освободиться от радикала с помощью возведения в квадрат обеих частей неравенства. Однако следует учитывать, что правая часть неравенства может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим два случая: $x+1 \leq 0$ и $x+1 > 0$.

а) Если $x+1 \leq 0$, т. е. $x \leq -1$, то данное неравенство не имеет решений, так как его левая часть неотрицательна.

б) Если $x > -1$ и $x \geq -3$, т. е. $x > -1$, то обе части неравенства неотрицательны, и поэтому при возведении в квадрат получается неравенство $x + 3 < (x + 1)^2$, равносильное исходному. Таким образом, данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > -1, \\ x + 3 < (x + 1)^2. \end{cases}$$

Так как второе неравенство этой системы равносильно каждому из неравенств $x^2 + x - 2 > 0$, $(x - 1)(x + 2) > 0$, то данная система равносильна системе $\begin{cases} x > -1, \\ (x + 2)(x - 1) > 0, \end{cases}$ откуда следует, что $x > 1$.

Ответ. $x > 1$.

З а м е ч а н и е. Неравенство примера 5 — это неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$, при решении которого можно воспользоваться тем, что оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Решить неравенство $\sqrt{x + 3} > x + 1$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая: а) $x + 1 < 0$; б) $x + 1 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$.

а) Если $x + 1 < 0$, то данное неравенство справедливо при всех значениях x из его области определения, т. е. решениями неравенства являются все значения x , удовлетворяющие системе $\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x + 1 < 0, \end{cases}$ откуда $-3 \leq x < -1$.

б) Если $x + 1 \geq 0$ и $x + 3 \geq 0$, т. е. $x \geq -1$, то исходное неравенство равносильно неравенству $x + 3 > (x + 1)^2$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $(x + 2)(x - 1) < 0$. Следовательно, в этом случае исходное неравенство сводится к системе $\begin{cases} x \geq -1, \\ (x + 2)(x - 1) < 0, \end{cases}$ откуда $-1 \leq x < 1$.

Итак, решениями данного неравенства являются все значения x из промежутков $-3 \leq x < -1$ и $-1 \leq x < 1$.

Ответ. $-3 \leq x < 1$.

З а м е ч а н и е. Неравенство примера 6 — это неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Для нахождения его решений нужно решить две системы

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Все решения каждой из этих систем, и только они, являются решениями неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$. В этом случае говорят, что неравенство равносильно совокупности двух систем.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить неравенство (1—18).

1. $\boxed{4} \sqrt{3x-2} < -2.$
2. $\boxed{4} \sqrt{x-2} < 5.$
3. $\boxed{4} \sqrt{3-2x} \leq 7.$
4. $\boxed{4} \sqrt{x+2} \geq 3.$
5. $\boxed{4} \sqrt{7-3x} > 5.$
6. $\boxed{4} \sqrt{2x+1} > -3.$
7. $\boxed{4} \sqrt{7-\frac{x}{2}} \geq -1.$
8. $\boxed{5} \sqrt{x+8} < x+2.$
9. $\boxed{5} \sqrt{x-2} \leq x-2.$
10. $\boxed{5} \sqrt{x+8} > x+2.$
11. $\boxed{5} \sqrt{x-2} > x-2.$
12. $\boxed{6} \sqrt{x^2+2x} > -3-x^2.$
13. $\boxed{7} \sqrt{x^2-3x+2} \leq -1-|x|.$
14. $\boxed{6} \sqrt{x+2} > \sqrt{4-x}.$
15. $\boxed{6} \sqrt{2x-8} \leq \sqrt{6x+13}.$
16. $\boxed{7} \sqrt{2+\sqrt{x^2+2x+5}} \leq 2.$
17. $\boxed{8} \sqrt{x^2+x-12} > 6-x.$
18. $\boxed{8} \sqrt{x^2-4x+13} \leq -x^2+4x-1.$

Вариант II

Решить неравенство (1—18).

1. $\boxed{4} \sqrt{4x-1} < -1.$
2. $\boxed{4} \sqrt{x-3} < 2.$
3. $\boxed{4} \sqrt{4-5x} \leq 8.$
4. $\boxed{4} \sqrt{x-7} \geq 2.$
5. $\boxed{4} \sqrt{6-6x} > 6.$
6. $\boxed{4} \sqrt{6-5x} > -0,5.$
7. $\boxed{4} \sqrt{\frac{x}{3}-2} \geq -2.$
8. $\boxed{5} \sqrt{x-3} < x-5.$
9. $\boxed{5} \sqrt{x+4} \leq x+4.$
10. $\boxed{5} \sqrt{x-3} > x-5.$
11. $\boxed{5} \sqrt{x+4} > x+4.$
12. $\boxed{6} \sqrt{4x-x^2} > -2-3x^2.$
13. $\boxed{7} \sqrt{x^2-x-2} \leq -2-|x|.$
14. $\boxed{6} \sqrt{3+2x} \geq \sqrt{x+1}.$
15. $\boxed{6} \sqrt{3-x} < \sqrt{3x-5}.$
16. $\boxed{7} \sqrt{8+\sqrt{x^2+6x+10}} \leq 3.$
17. $\boxed{8} \sqrt{x^2-x-12} < x.$
18. $\boxed{8} \sqrt{x^2-6x+13} \leq -x^2+6x-7.$

Контрольная работа № 2

Вариант I

1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt[4]{4 - x^2}.$$

2. Изобразить эскиз графика функции $y = x^{-5}$.

1) Выяснить, на каких промежутках функция убывает.

2) Сравнить числа:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-5} \text{ и } 1; \quad (3,2)^{-5} \text{ и } (3\sqrt{2})^{-5}.$$

3. Решить уравнение:

$$1) \sqrt{1-x} = 3; \quad 2) \sqrt{x+2} = \sqrt{3-x}; \quad 3) \sqrt{1-x} = x+1;$$

$$4) \sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1.$$

4. Найти функцию, обратную к функции

$$y = (x-8)^{-1},$$

указать её область определения и множество значений.

5. Решить неравенство $\sqrt{x+8} > x+2$.

Вариант II

1. Найти область определения функции

$$y = (x^2 - 9)^{-\frac{1}{3}}.$$

2. Изобразить эскиз графика функции $y = x^{-6}$.

1) Выяснить, на каких промежутках функция возрастает.

2) Сравнить числа:

$$(4,2)^{-6} \text{ и } 1; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-6} \text{ и } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-6}.$$

3. Решить уравнение:

$$1) \sqrt{x-2} = 4; \quad 2) \sqrt{5-x} = \sqrt{x-2}; \quad 3) \sqrt{x+1} = 1-x;$$

$$4) \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+8} = 1.$$

4. Найти функцию, обратную к функции

$$y = 2(x+6)^{-1},$$

указать её область определения и множество значений.

5. Решить неравенство $\sqrt{x-3} < x-5$.

Задания для подготовки к экзамену

1. [5] Из промежутков $[-1; 1]$; $[1; \sqrt{2}]$; $\left[-\frac{4}{3}; 1\right)$; $(\sqrt{2}; 2]$ выбрать тот, которому принадлежат нули функции $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2} - x$.
Ответ. $[1; \sqrt{2}]$.

2. [7] Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы
- $$\begin{cases} \sqrt{25 - 10x + x^2} + y = 4, \\ y - 3x + 11 = 0. \end{cases}$$

Найти произведение $x_0 y_0$. Ответ. 20.

3. [5] Решить уравнение:
1) $\sqrt{x(x-2)(x+3)} = 3 - x$; 2) $\sqrt{x(x-3)(x+4)} = 6 - x$.
Указание. 1) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ x(x-2)(x+3) = (3-x)^2. \end{cases}$$

Ответ. 1) $x = \sqrt[3]{9}$; 2) $x = \sqrt[3]{36}$.

4. [6] Решить неравенство:
1) $\sqrt{2-5x} < 1$; 2) $\sqrt{1-3x} < 2$.
Ответ. 1) $0,2 < x \leq 0,4$; 2) $-1 < x \leq \frac{1}{3}$.

5. [6] Найти область определения функции:
1) $y = \sqrt{4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3}}$; 2) $y = \sqrt{2 - \frac{1}{x+6} + \frac{9}{x-2}}$.
Ответ. 1) $x < -1$, $x > 3$, $x = 2$; 2) $x < -6$, $x > 2$, $x = -4$.

6. [7] Решить неравенство:
1) $x^2 + 25 \geq 8\sqrt{5-x} + 10x$; 2) $27\sqrt{4-x} - 16 \leq x^2 - 8x$.
Указание. 1) Сделать замену $\sqrt{5-x} = t \geq 0$.
Ответ. 1) $x \leq 1$, $x = 5$; 2) $x \leq -5$, $x = 4$.

7. [7] Решить неравенство $\sqrt{x^2 + x - 12} > x$.
Ответ. $x \leq -4$, $x > 12$.

8. [7] Решить неравенство $4 - 5x < \sqrt{16 + 30x - 25x^2}$.
Ответ. $0 < x \leq 1,6$.

9. [8] Решить уравнение:
1) $\sqrt{2x+1} = 1 - 2|x|$; 2) $\sqrt{1-3x} = 1 - 3|x|$.
Ответ. 1) $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

10. [8] Решить уравнение:
1) $\sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{5|x+2| + 2}$; 2) $\sqrt{x^2 - 6x} = \sqrt{10|x-3| + 2}$.
Ответ. 1) $x_1 = -8$, $x_2 = 4$; 2) $x_1 = -8$, $x_2 = 14$.

11. [6] Решить неравенство:

1) $(x-5)\sqrt{x} \leq 0$; 2) $x\sqrt{x+1} \leq 0$.

Ответ. 1) $0 \leq x \leq 5$; 2) $-1 \leq x \leq 0$.

12. [8] Решить неравенство:

1) $\frac{\sqrt{x^2 + 5x - 4x + 6}}{x - 2} \leq -2$; 2) $\frac{\sqrt{x^2 - 5x - 4x + 26}}{7 - x} > 2$.

Ответ. 1) $x \leq -5, 0 \leq x < 2, x \geq 4$; 2) $x \leq 0, 5 \leq x < 7, x > 9$.

13. [7] Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы
$$\begin{cases} y - \sqrt{25 - x^2} = 0, \\ y + 5 = |x - 6|. \end{cases}$$

Найти сумму $x_0 + y_0$. Ответ. 1.

14. [9] Решить уравнение $\sqrt{49 + 9x|x+4|} - 2x = 7$. Ответ. $-\frac{8}{5}; 0$.

15. [7] При каких значениях a число 2 является корнем уравнения $\sqrt{x-a} = 3a-x$?

Указание. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2-a} = 3a-2$ относительно a , т. е. к решению системы

$$\begin{cases} 3a - 2 \geq 0, \\ 2 - a = (3a - 2)^2. \end{cases}$$

Ответ. При $a = 1$.

16. [7] При каких значениях b число (-2) является корнем уравнения $3\sqrt{b-x} = 2b-x$? Ответ. При $b = 2$.

17. [9] Для каждого a найти все решения неравенства:

1) $(x-a)\sqrt{x-2} \geq 0$; 2) $(5-x)\sqrt{x-a} \leq 0$.

Указание. 1) Рассмотреть случаи: $a = 2, a > 2, a < 2$.

2) Рассмотреть случаи: $a = 5, a > 5, a < 5$.

Ответ. 1) Если $a \leq 2$, то $x \geq 2$; если $a > 2$, то $x = 2, x \geq a$;

2) если $a < 5$, то $x = a, x \geq 5$; если $a \geq 5$, то $x \geq a$.

18. [7] Для каждого a решить уравнение:

1) $\sqrt{x^2 - 6x - a} = x - 3$; 2) $\sqrt{x^2 + 2x + a} = x + 1$.

Ответ. 1) Если $a \neq -9$, то уравнение не имеет решений; если $a = -9$, то $x \geq 3$; 2) если $a \neq 1$, то решений нет; если $a = 1$, то $x \geq -1$.

19. [8] Даны уравнения: 1) $\sqrt{x+1} = x+a$; 2) $\sqrt{x+a} = x+3$.

При каких значениях параметра a каждое из них имеет единственное решение?

Указание. 1) Воспользоваться подстановкой $\sqrt{x+1} = t$ и найти значения a , при которых квадратное уравнение $t^2 - t + a - 1 = 0$ имеет один неотрицательный корень. 2) Данное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x + a = x^2 + 6x + 9. \end{cases}$$

Ответ. 1) При $a < 1$ и $a = 1,25$; 2) при $a = 2,75$ и $a > 3$.

Задания для интересующихся математикой

Примеры с решениями

Решить уравнение $\sqrt{2x^2 + 4x - 23} - \sqrt{x^2 + 2x - 8} = 1$.

Решение. Пусть $t = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$, тогда $\frac{2x^2 + 4x - 23}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} = 1 + t$, и уравнение можно записать в виде $\sqrt{2t^2 - 7} = t + 1$. Возведя обе части полученного уравнения в квадрат, имеем $2t^2 - 7 = t^2 + 2t + 1$, или $t^2 - 2t - 8 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 4$. Так как $t \geq 0$, то $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 4$, $x^2 + 2x - 24 = 0$, $x_1 = -6$, $x_2 = 4$.

Ответ. $x_1 = -6$, $x_2 = 4$.

Найти все действительные корни уравнения

$$|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| = 7.$$

Решение. Полагая $x - 2\sqrt{x} = t$, получаем уравнение $|t - 1| + |t + 2| = 7$, откуда $t_1 = -4$, $t_2 = 3$. Если $t = -4$, то $x - 2\sqrt{x} + 4 = 0$. Это уравнение не имеет действительных корней. Если $t = 3$, то $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$, откуда $x = 9$.

Решить уравнение $5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |3 - 5x|$.

Решение. 1) Если $x \leq -1$, то уравнение примет вид

$$5\sqrt{1 + x^2 - 1} = 6 - 5x, \quad 5\sqrt{x^2} = 6 - 5x, \quad -5x = 6 - 5x.$$

В этом случае уравнение не имеет решений.

2) Если $-1 < x \leq \frac{3}{5}$, то $5\sqrt{2 - x^2} = 6 - 5x$, откуда

$$\begin{aligned} 25(2 - x^2) &= 36 - 60x + 25x^2, \\ 25x^2 - 30x - 7 &= 0, \quad (5x + 1)(5x - 7) = 0. \end{aligned}$$

Корень $x_1 = -\frac{1}{5}$ удовлетворяет условию $x \in \left(-1; \frac{3}{5}\right]$, а корень $x_2 = \frac{7}{5}$ не удовлетворяет этому условию.

3) Если $\frac{3}{5} < x \leq 1$, то

$$5\sqrt{2 - x^2} = 5x, \quad 25(2 - x^2) = 25x^2, \quad x^2 = 1,$$

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Условию $x \in \left(\frac{3}{5}; 1\right]$ удовлетворяет только корень x_1 .

4) Если $x > 1$, то $5\sqrt{x^2} = 5x$. Этому уравнению удовлетворяют все значения $x > 1$.

Ответ. $x = -\frac{1}{5}$, $x \geq 1$.

Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2 y^5} = 4(y^2 - x^2), \\ 5\sqrt[3]{x^4 y} = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Решение. Если $x = 0$, то $y = 0$ и система имеет решение $(0; 0)$. Пусть $x \neq 0$. Перемножив почленно уравнения системы, получим

$$15x^2y^2 = 4(y^4 - x^4).$$

Пусть $t = \left(\frac{y}{x}\right)^2 > 0$, тогда $4t^2 - 15t - 4 = 0$, откуда $t = \frac{15 \pm 17}{8}$. Так

как $t > 0$, то $t = \frac{y^2}{x^2}$, $y^2 = 4x^2$. Если $y = 2x$, то из второго уравнения исходной системы следует, что

$$5\sqrt[3]{2x^5} = 5x^2, \sqrt[3]{\frac{2}{x}} = 1, x = 2, y = 4.$$

Если $y = -2x$, то $\sqrt[3]{-\frac{2}{x}} = 1$, $x = -2$, $y = 4$. Таким образом, система имеет три решения: $(0; 0)$, $(2; 4)$, $(-2; 4)$.

Ответ. $(0; 0)$, $(2; 4)$, $(-2; 4)$.

Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{xy} = \frac{x-y}{x^2y^2} + \frac{xy}{x-y}, \\ \frac{x-y}{xy} \sqrt{x-y} = 2 - xy. \end{cases}$$

Решение. Пусть $u = \sqrt{x-y}$, $v = xy$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{v} = \frac{u^2}{v^2} + \frac{v}{u^2}, \\ \frac{u^3}{v} = 2 - v, \end{cases}$$

где $u > 0$ ($x > y$), $v \neq 0$ ($xy \neq 0$).

Первое уравнение этой системы можно записать в виде $u^2v^2 - u^4 = v^3 - vu^2$, или $(v^2 - u^2)(u^2 - v) = 0$, откуда $u = 1$ ($u > 0$), $v = 1$.

Если $v = -u$, то $u^2 + u + 2 = 0$. Это уравнение не имеет действительных решений.

Итак, $u = 1$, $v = 1$, т. е. $\sqrt{x-y} = 1$, $xy = 1$, откуда $u^2 + y - 1 = 0$, $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 5x + 6} < 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Решение. Область определения неравенства определяется условием $x^2 + 5x + 6 \geq 0$, откуда

$$x \leq -3, x \geq -2. \quad (1)$$

На множестве (1) исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &< 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + x^2 + x + 1, \\ 2(x + 1) &< \sqrt{x^2 + x + 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $x \leq -1$ и выполняются условия (1), то неравенство (2) является верным, и поэтому значения x из промежутков $x \leq -3$ и $-2 \leq x \leq -1$ — решения исходного неравенства.

Если левая часть (2) положительна и выполняются условия (1), т. е. $x > -1$, то неравенство (2) равносильно каждому из неравенств $4(x^2 + 2x + 1) < x^2 + x + 1$,

$$3x^2 + 7x + 3 < 0. \quad (3)$$

Так как уравнение $3x^2 + 7x + 3 = 0$ имеет корни $x_1 = \frac{-7 - \sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}$, где $x_1 < -1$, $x_2 > -1$, то решения неравенства (3), удовлетворяющие условию $x > -1$, образуют интервал $-1 < x < x_2$.

$$\text{Ответ. } x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}.$$

7. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 + 2x - 3}} \geq \frac{1}{4 - x}.$$

Решение. Область E допустимых значений x данного неравенства, определяемая условиями

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) > 0, \quad x \neq 4,$$

представляет собой объединение промежутков

$$(-\infty; -3), (1; 4), (4; +\infty).$$

При $x > 4$ левая часть неравенства положительна, а правая — отрицательна. Поэтому значения $x > 4$ — решения исходного неравенства. Если $x \in E$ и $x < 4$, то неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x - 3} &\leq 4 - x, \quad x^2 + 2x - 3 \leq x^2 - 8x + 16, \\ 10x &\leq 19, \quad x \leq \frac{19}{10}. \end{aligned}$$

В этом случае решениями исходного неравенства являются значения $x \in E$, такие, что $x < 4$ и $x \leq \frac{19}{10}$, т. е.

$$x \in (-\infty; -3) \text{ и } x \in (1; 1,9].$$

$$\text{Ответ. } x < -3; 1 < x \leq 1,9; x > 4.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—4).

1. а) $\sqrt{2x^2 - 12x + 46} - \sqrt{x^2 - 6x + 22} = 3$.

Ответ. $x_1 = -3$, $x_2 = 9$.

б) $\sqrt{2x^2 - 8x + 49} - \sqrt{x^2 - 4x + 21} = 4$.

Ответ. $x_1 = -6$, $x_2 = 10$.

2. а) $|x - \sqrt{x} - 2| + |\sqrt{x} + 6 - x| = 8$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{17 + \sqrt{33}}{2}$, $x_3 = 1$.

б) $|3\sqrt{x} + 2 - x| + |x - 3\sqrt{x} + 3| = 9$. Ответ. $x = 16$.

3. а) $|2x + 5| = \sqrt{x + 3} + 1$. Ответ. $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{\sqrt{17} - 15}{8}$.

б) $3 - \sqrt{x + 1} = |2x - 2|$. Ответ. $x = \frac{19 + \sqrt{120}}{2}$.

4. а) $5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |5x + 3|$. Ответ. $x = \frac{1}{5}$, $x \leq -1$.

б) $\sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|1 - x|$. Ответ. $x = \frac{1}{4}$, $x \geq \frac{5}{4}$.

Решить систему уравнений (5—7).

5. а)
$$\begin{cases} 3x - 1 = \frac{y}{x} + 2\sqrt{x + y}, \\ \sqrt{y + \sqrt{x + y}} = y - 3x - 6. \end{cases}$$

Ответ. $(6; 30)$, $\left(\frac{2 - \sqrt{85}}{9}; \frac{29 - \sqrt{85}}{3}\right)$.

б)
$$\begin{cases} 1 - 5y = \frac{x}{y} - 6\sqrt{x - y}, \\ \sqrt{x - \sqrt{x - y}} = x - 5x - 6. \end{cases}$$

Ответ. $(42; 6)$, $\left(\frac{47 + \sqrt{229}}{5}; \frac{2 + \sqrt{229}}{25}\right)$.

6. а)
$$\begin{cases} \sqrt{11x - y} - \sqrt{y - x} = 1, \\ 7\sqrt{y - x} + 6y - 26x = 3. \end{cases}$$
 Ответ. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

б)
$$\begin{cases} \sqrt{x - 4y} - 2\sqrt{3y + x} = 1, \\ 7x\sqrt{3y + x} + 22y + 2x = 13. \end{cases}$$
 Ответ. $(13; -3)$.

7. а)
$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{2x^2y^3} = 2(x^2 + y^2), \\ 3\sqrt[3]{4x^4y^3} = 4(y^2 - x^2). \end{cases}$$
 Ответ. $(0; 0)$, $(-2; 4)$, $(2; 4)$.

б)
$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{2x^5y^2} = 4(x^2 + y^2), \\ 3\sqrt[3]{xy^4} = x^2 - y^2. \end{cases}$$
 Ответ. $(0; 0)$, $(4; 2)$, $(4; -2)$.

Решить неравенство (8—12).

8. а) $2\sqrt{x^2 + x} - x > x^2 - 8$.

Ответ. $-\frac{1 + \sqrt{65}}{2} < x \leq -1, 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{65} - 1}{2}$.

б) $\sqrt{x^2 + 2x} - x^2 > 2x - 20$.

Ответ. $-1 - \sqrt{26} < x \leq 2, 0 \leq x < -1 + \sqrt{26}$.

9. а) $\sqrt{x^2 - 2x} < 1 + \sqrt{x^2 - x - 2}$.

Ответ. $x < \frac{1 - \sqrt{28}}{3}, x \geq 2$.

б) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}$.

Ответ. $x \leq 1, x > \frac{8 + 2\sqrt{7}}{3}$.

10. а) $\sqrt{x^2 - 10 + |x - 3|} > x - 3$. Ответ. $x \leq \frac{1 - \sqrt{29}}{2}, x > \frac{22}{7}$.

б) $\sqrt{x^2 - 5 + |x - 2|} > x - 2$. Ответ. $x \leq \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, x > \frac{11}{5}$.

11. а) $\sqrt{\frac{3}{3x^2 - 2x - 1}} \geq \frac{1}{2 - x}$. Ответ. $x < -\frac{1}{3}, 1 < x \leq \frac{13}{10}, x > 2$.

б) $\sqrt{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}} \geq \frac{2}{1 + 2x}$. Ответ. $x < -\frac{1}{2}, \frac{11}{20} \leq x < 1, x > 3$.

12. а) $\sqrt{\sqrt{6x + \frac{49}{4}} + \frac{7}{2}} \geq x$. Ответ. $-\frac{49}{24} \leq x \leq 3$.

б) $\sqrt{\sqrt{16x + 36} + 6} \geq x$. Ответ. $-\frac{9}{4} \leq x \leq 4$.

§ 11. Показательная функция, её свойства и график

Справочные сведения

Показательная функция — это функция вида $y = a^x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства показательной функции $y = a^x$.

1⁰. Область определения — множество всех действительных чисел ($x \in \mathbf{R}$).

2⁰. Множество значений — множество всех положительных чисел ($y > 0$).

3⁰. График функции проходит через точку (0; 1).

4⁰. Функция возрастающая при $a > 1$ (рис. 19); убывающая при $0 < a < 1$ (рис. 20).

Примеры с решениями

С помощью графика функции (рис. 21) определить:

1) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю;

2) значения аргумента, при которых функция принимает положительные (отрицательные) значения;

3) промежутки возрастания (убывания) функции.

Ответ. 1) $x = 0$, $x = 2$; 2) положительные при $x < 0$, $x > 2$, отрицательные при $0 < x < 2$; 3) возрастает на промежутке $x \geq 1$, убывает на промежутке $x \leq 1$.

С помощью графика функции $y = 2^x$ (рис. 22) найти приближённое значение числа: 1) $\sqrt{2}$; 2) $2^{-\frac{3}{2}}$; 3) $2^{2,25}$.

Решение. 1) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; для функции $y = 2^x$ по значению $x = \frac{1}{2}$ находим $y \approx 1,4$ (это ордината точки A на графике функции

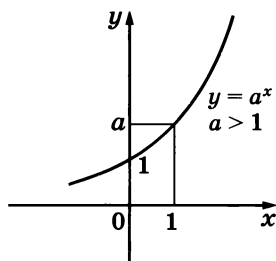


Рис. 19

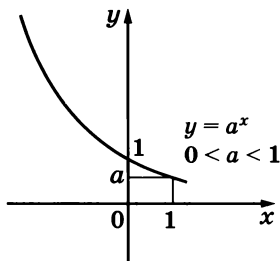


Рис. 20

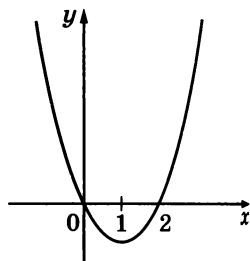


Рис. 21

$y = 2^x$); 2) $2^{-\frac{3}{2}} \approx 0,4$ (ордината точки B);
3) $2^{2,1} \approx 4,3$ (ордината точки C).

Выяснить, является ли возрастающей (убывающей) функция:

1) $y = \left(1\frac{1}{3}\right)^x$; 2) $y = 0,57^x$;

3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.

Решение. 1) Так как $1\frac{1}{3} > 1$, то функция $y = \left(1\frac{1}{3}\right)^x$ возрастающая.

2) Поскольку $0 < 0,57 < 1$, функция $y = 0,57^x$ убывающая.

3) Имеем $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$, $2 > 1$. Так как функция $y = 2^x$ возрастающая, то и функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ также возрастающая.

Сравнить $0,3^{-\sqrt{5}}$ с единицей.

Решение. Представим 1 в виде $0,3^0$. Так как $0 < 0,3 < 1$, то функция $y = 0,3^x$ убывающая. Поскольку $-\sqrt{5} < 0$, значит, $0,3^{-\sqrt{5}} > 0,3^0$, т. е. $0,3^{-\sqrt{5}} > 1$.

Ответ. $0,3^{-\sqrt{5}} > 1$.

Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = x + 1$. Они пересекутся в одной точке с абсциссой $x = 0$ (рис. 23). Это значение и является корнем данного уравнения.

Ответ. $x = 0$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [4] С помощью графика функции (рис. 24) определить:

1) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю;

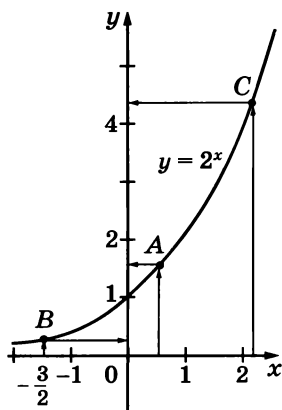


Рис. 22

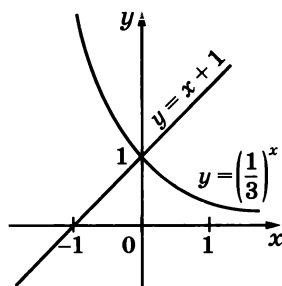


Рис. 23

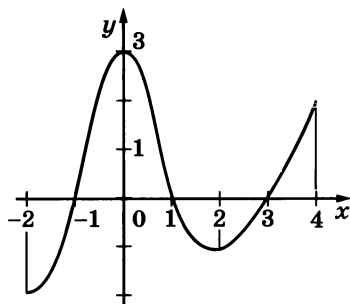


Рис. 24

- 2) координаты точки пересечения графика с осью ординат;
- 3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные (отрицательные) значения;
- 4) промежутки возрастания (убывания) функции.

Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция (2—4).

2. [1] $y = 5,3^x$. 3. [2] $y = 0,14^{-x}$. 4. [2] $y = \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^x$.

5. [2] С помощью графика функции $y = 2^x$ найти приближённое значение $2^{0,8}$.

6. [2] С помощью графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ найти приближённое значение корня уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 5$.

Сравнить числа (7—9).

7. [2] $5,6^{-4}$ и $5,6^{-5}$. 8. [3] $\left(1\frac{1}{7}\right)^{-8}$ и 1. 9. [4] $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Записать данную зависимость в виде показательной функции (10—13).

10. [4] $y = \frac{9^{3x}}{3^{5x}}$. 11. [5] $\frac{(\sqrt{2})^{5x}}{8^x}$.

12. [4] $y = 0,3^{-x} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^x$. 13. [5] $y = (\sqrt{2} - 1)^{2x}$.

14. [5] Найти координаты точек пересечения графиков функций $y = 4^x$ и $y = \frac{1}{4}$.

15. [5] Решить графически уравнение $3^x = x + 2$.

Построить график функции (16—17).

16. [6] $y = 2^x - 2$. 17. [6] $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$.

Найти область определения функции (18—19).

18. [4] $y = 2^{\sqrt{x-1}}$. 19. [5] $y = 0,7^{\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}}$.

Найти множество значений функции (20—21).

20. [4] $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$. 21. [5] $y = 3^x + 2$.

22. [6] Пользуясь графической иллюстрацией, определить число корней уравнения $2^x = 3 - x^2$.

Вариант II

1. [4] С помощью графика функции (рис. 25) определить:

- 1) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю;
- 2) координаты точки пересечения графика с осью ординат;
- 3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные (отрицательные) значения;
- 4) промежутки возрастания (убывания) функции.

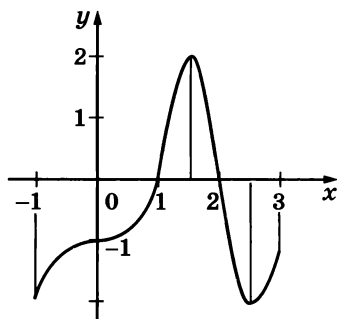


Рис. 25

Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция (2—4).

2. [1] $y = 0,3^x$.

3. [2] $y = 8,7^{-x}$.

4. [2] $y = \left(\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^x$.

5. [2] С помощью графика функции $y = 2^x$ найти приближённое значение $2^{-1,2}$.

6. [2] С помощью графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ найти приближённое значение корня уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{7}{2}$.

Сравнить числа (7—9).

7. [2] $0,9^{-6}$ и $0,9^{-5}$.

8. [3] $1,2^{-4}$ и 1.

9. [4] $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{6}{5}\right)^3$.

Записать данную зависимость в виде показательной функции (10—13).

10. [4] $y = \frac{8^{2x}}{2^{5x}}$.

11. [5] $y = \frac{(\sqrt{2})^{7x}}{4^{2x}}$.

12. [4] $y = \left(2\frac{1}{2}\right)^{-x} \cdot 0,4^x$.

13. [5] $y = (\sqrt{2} + 1)^{2x}$.

14. [5] Найти координаты точек пересечения графиков функций $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{9}$.

15. [5] Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^x = x + 5$.

Построить график функции (16—17).

16. [6] $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

17. [6] $y = 3^{x-1}$.

Найти область определения функции (18—19).

18. [4] $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{1-x}}$.

19. [5] $y = 2,5^{\sqrt{x^2-9}}$.

Найти множество значений функции (20—21).

20. [4] $y = 3^{x-1}$.

21. [4] $y = 2^x - 3$.

22. [6] Пользуясь графической иллюстрацией, определить число корней уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 - (x-1)^2$.

§ 12. Показательные уравнения

Справочные сведения

При решении показательных уравнений пользуются следующим свойством показательной функции: если $a > 0$ и $a \neq 1$, то равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Примеры с решениями

Проверить, является ли число 3 корнем уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} = x+1$.

Решение. Подставив в уравнение значение $x = 3$, получим $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+1} = 3+1$ — верное равенство; значит, $x = 3$ является корнем данного уравнения.

Решить уравнение $7^{2x+1} = 49$.

Решение. Запишем уравнение в виде $7^{2x+1} = 7^2$, откуда $2x+1 = 2$, $2x = 1$, $x = 0,5$.

Решить уравнение $27 \cdot 9^x = 1$.

Решение. Так как $27 = 3^3$, $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, $1 = 3^0$, то уравнение можно записать в виде $3^{3+2x} = 3^0$, откуда $x = -1,5$.

Решить уравнение $5^{2x} = 13^x$.

Решение. Так как $5^{2x} = (5^2)^x = 25^x$, то уравнение можно записать в виде $\frac{25^x}{13^x} = 1$, откуда $\left(\frac{25}{13}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Решить уравнение $2^{x+2} - 2^x + 2^{x+1} = 20$.

Указание. В левой части вынести 2^x за скобки.

Ответ. $x = 2$.

Решить уравнение $9^x - 26 \cdot 3^x - 27 = 0$.

Решение. Так как $9^x = 3^{2x}$, то уравнение можно записать в виде $3^{2x} - 26 \cdot 3^x - 27 = 0$. С помощью замены $3^x = t$ (тогда $3^{2x} = t^2$) уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 26t - 27 = 0$, корнями которого являются $t_1 = 27$, $t_2 = -1$. Уравнение $3^x = 27$ имеет корень $x = 3$. Уравнение $3^x = -1$ не имеет корней (показательная функция принимает только положительные значения).

Ответ. $x = 3$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [2] Какое из чисел -2 , 0 , 1 является корнем уравнения $25^x = 25x$?

Решить уравнение (2—12).

2. [3] $0,3^{5-2x} = 0,09$. 3. [4] $\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^x = \sqrt[3]{5}$.
4. [4] $225 \cdot 15^{2x+1} = 1$. 5. [5] $43^x = 8^{2x}$.
6. [5] $3^{x-2} - 3^{x-3} = 6$. 7. [4] $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.
8. [4] $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$. 9. [5] $2^{\sqrt{x^2+1}} = 8$.
10. [6] $(0,2)^{x^2} \cdot 5^{2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$. 11. [5] $2 \cdot 9^x - 17 \cdot 3^x = 9$.
12. [7] $(\sqrt{5})^{|3-x|} = 25$.

Вариант II

1. [2] Какое из чисел 3 , 0 , -1 является корнем уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3x + 5$?

Решить уравнение (2—12).

2. [3] $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-3x} = 27$. 3. [4] $(2\sqrt[3]{4})^x = 8$.
4. [4] $17^x \cdot 17^{x+5} = 17$. 5. [5] $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$.
6. [5] $4^{x-3} + 4^x = 65$. 7. [4] $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.
8. [4] $25^x + 3 \cdot 5^x + 2 = 0$. 9. [5] $3^{\sqrt{(x+1)^2}} = 3$.
10. [6] $\left(\frac{1}{4} \cdot 4^x\right)^x = 2^{2x+6}$. 11. [5] $3 \cdot 4^x - 11 \cdot 2^x = 4$.
12. [7] $9^{|x+2|} = \sqrt{3}$.

§ 13. Показательные неравенства

Справочные сведения

При решении показательных неравенств пользуются следующими свойствами показательной функции:

1) если $a > 1$, то неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2$;

2) если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1 < x_2$.

Примеры с решениями

Решить неравенство $6^{1-x} > 36$.

Решение. Имеем $6^{1-x} > 6^2$. Так как $6 > 1$, то $1 - x > 2$, откуда $x < -1$.

Решить неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq 27$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq 3^3$, или $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$. Так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то $2x \geq -3$, откуда $x \geq -1,5$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить неравенство (1—5).

1. $\boxed{3} \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{1}{2}$. 2. $\boxed{4} 9^{2x} \leq \frac{1}{3}$. 3. $\boxed{4} \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-9} \leq 1$.
4. $\boxed{5} 4^x + 2^{x+1} - 80 < 0$. 5. $\boxed{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{27}$.

Решить графически уравнение (6—7).

6. $\boxed{4} 3^x = 2x + 1$. 7. $\boxed{5} \left(\frac{1}{2}\right)^x = x^3 + 3$.

Решить графически неравенство (8—9).

8. $\boxed{5} \left(\frac{1}{3}\right)^x < 3x + 6$. 9. $\boxed{6} 2^x \leq 12 - x^3$.

Вариант II

Решить неравенство (1—5).

1. $\boxed{3} \left(1\frac{3}{4}\right)^x < \frac{4}{7}$. 2. $\boxed{4} (0,1)^{x+1} \geq 100$. 3. $\boxed{4} (\sqrt{3})^{4-x^2} \geq 1$.
4. $\boxed{5} 9^x - 7 \cdot 3^x - 18 < 0$. 5. $\boxed{6} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} < 125$.

Решить графически уравнение (6—7).

6. $\boxed{4} 2^x = -\frac{1}{2}x$. 7. $\boxed{5} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 + x^3$.

Решить графически неравенство (8—9).

8. $\boxed{5} \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2x + 4$. 9. $\boxed{6} 3^x \leq 4 - x^3$.

§ 14. Системы показательных уравнений и неравенств

Примеры с решениями

Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3^{x+y} = 9. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся способом подстановки. Выразив из первого уравнения y , получим $y = 1 - 2x$; тогда $3^{x+(1-2x)} = 9$ или $3^{1-x} = 3^2$, откуда $1 - x = 2$, $x = -1$. Следовательно, $y = 1 - 2 \cdot (-1)$, $y = 3$.

Ответ. $x = -1$, $y = 3$.

Решить систему
$$\begin{cases} 2^{x+1} > 2^{x^3}, \\ 7^{x^2-8} = 7^{x-2}. \end{cases}$$

Решение. Решая уравнение $7^{x^2-8} = 7^{x-2}$, получим $x^2 - 8 = x - 2$, $x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Так как $x = -2$ является решением неравенства $2^{x+1} > 2^{x^3}$, а $x = 3$ не является, то решением системы будет $x = -2$.

Ответ. $x = -2$.

Замечание. Если система состоит из одного уравнения и одного неравенства с одним неизвестным, то её решениями будут те корни уравнения, которые являются и решениями неравенства.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить систему уравнений (1—2).

1. [4]
$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 4^{2x-3y} = 1. \end{cases}$$

2. [6]
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 12, \\ 2^{y+1} - 3^x = 5. \end{cases}$$

Решить систему (3—4).

3. [7]
$$\begin{cases} 6^{5-x} > \frac{1}{3}, \\ 0,6^{x^2} = 0,6^{5x+6}. \end{cases}$$

4. [8]
$$\begin{cases} 0,3^{xy} = \left(3\frac{1}{3}\right)^{-12}, \\ 2^x \cdot 2^y = 2^3 \cdot 2^{-10}, \\ 0,5^x > 0,5^y. \end{cases}$$

Вариант II

Решить систему уравнений (1—2).

1. [4]
$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 3^{x-3y} = 27. \end{cases}$$

2. [6]
$$\begin{cases} 5^x \cdot 3^y = 135, \\ 3^y - 5^{x+1} = 2. \end{cases}$$

Решить систему (3—4).

3. [7]
$$\begin{cases} 7^{x-2} < 0,4, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x}. \end{cases}$$

4. [8]
$$\begin{cases} (13^x)^y = 13^{-8}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-y} = \frac{4}{9}, \\ \pi^x > \pi^y. \end{cases}$$

Контрольная работа № 3

Вариант I

1. Решить уравнение:

$$1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25; \quad 2) 4^x + 2^x - 20 = 0.$$

2. Решить неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^x > 1\frac{1}{3}$.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ 5^{x+y} = 25. \end{cases}$

4. Решить неравенство:

$$1) (\sqrt{5})^{x-6} < \frac{1}{5}; \quad 2) \left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geq 1.$$

5. Решить уравнение $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 2^{x+5} + 3 \cdot 2^x$.

Вариант II

1. Решить уравнение:

$$1) 0,1^{2x-3} = 10; \quad 2) 9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0.$$

2. Решить неравенство $\left(1\frac{1}{5}\right)^x < \frac{5}{6}$.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = -2, \\ 6^{x+5y} = 36. \end{cases}$

4. Решить неравенство:

$$1) (\sqrt[3]{3})^{x+6} > \frac{1}{9}; \quad 2) \left(1\frac{2}{7}\right)^{x^2-4} \leq 1.$$

5. Решить уравнение $3^{x+3} + 3^x = 5 \cdot 2^{x+4} - 17 \cdot 2^x$.

Задания для подготовки к экзамену

1. [5] Решить неравенство:

1) $\frac{0,2^x - 0,008}{x^2 - 10x + 25} \leq 0$; 2) $\frac{x^2 + 6x + 9}{2^x - 4} \geq 0$.

Указание. 1) Имеем $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$, $(x - 5)^2 > 0$ при всех $x \neq 5$. Исходное неравенство сводится к системе $\begin{cases} 0,2^x - 0,2^3 \leq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$

Ответ. 1) $3 \leq x < 5$, $x > 5$; 2) $x = -3$, $x > 2$.

2. [5] Решить уравнение:

1) $\frac{2x^2 - 5x - 3}{3^x - 27} = 0$; 2) $\frac{3x^2 + 5x - 2}{2^x - 0,25} = 0$.

Указание. 1) Данное уравнение сводится к системе $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 = 0, \\ 3^x - 27 \neq 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_1 = -0,5, x_2 = 3, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Ответ. 1) $x = -0,5$; 2) $x = \frac{1}{3}$.

3. [8] Решить уравнение:

1) $5^{2x^2-1} - 3 \cdot 5^{(x+1)(x+2)} - 2 \cdot 5^{6(x+1)} = 0$;

2) $3^{2x^2-1} - 3^{(x-1)(x+5)} - 3 \cdot 3^{8(x+1)} = 0$.

Указание. 1) Обе части уравнения разделить на положительное число $5^{6(x+1)}$. Полученное уравнение $5^{2x^2-6x-7} - 3 \cdot 5^{x^2-3x-4} - 2 = 0$ решается заменой $5^{x^2-3x-4} = t$.

Ответ. 1) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

4. [7] Решить уравнение $(\sqrt{2} + 1)^{x^2} = (3 - 2\sqrt{2})^{x-1,5}$.

Указание. Воспользоваться тем, что

$$3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)^2.$$

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

5. [8] Найти $3^x + 3^{-x}$, если $3^x - 3^{-x} = 4$.

Указание. Выразить $(3^x + 3^{-x})^2$ через $(3^x - 3^{-x})^2$.

Ответ. $2\sqrt{5}$.

6. [8] Найти $3^{2x} - 3^{-2x}$, если $3^x - 3^{-x} = 4$.

Указание. Использовать идею решения предыдущего задания.

Ответ. $8\sqrt{5}$.

7. [6] Решить уравнение:

1) $5^{x-2} + 2^{x+1} + 2^{x+2} - 5^x = 0$; 2) $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$.

Решение. 1) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 5^x - 5^{x-2}$, $2^{x-2}(2^3 + 2^4) = 5^{x-2}(5^2 - 1)$. Разделим обе части уравнения на $24 \cdot 5^{x-2}$.

Получим $\left(\frac{2}{5} \right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ. 1) $x = 2$; 2) $x = 3$.

8. [5] Решить уравнение $3 \cdot 16^x - 5 \cdot 36^x + 2 \cdot 81^x = 0$.

Указание. Разделить обе части уравнения на 81^x , полученное квадратное уравнение решить относительно $\left(\frac{4}{9}\right)^x$.

Ответ. $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$.

9. [5] Решить уравнение $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{-x+2} = 5$.

Указание. Обе части уравнения умножить на 2^x , полученное уравнение решить относительно 2^x .

Ответ. $x = 2$.

10. [9] Решить уравнение $2^x + 4^x + 6^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

Решение.

а) При $x < 0$ каждое слагаемое в левой части равенства меньше 1, а каждое слагаемое в правой части больше 1, поэтому при $x < 0$ равенство невозможно.

б) Аналогично доказывается, что равенство невозможно и при $x > 0$.

в) При $x = 0$ получим $3 = 3$, откуда 0 — корень уравнения.

Ответ. $x = 0$.

11. [7] Через сколько месяцев цены удвоятся, если ежемесячный рост цен равен 6%?

Ответ. Приблизительно через 12 месяцев.

12. [8] В некотором государстве зарплату повышают ежегодно на 50%, а цены — ежемесячно на 5%. Через сколько лет граждане этого государства будут жить в 2 раза хуже?

Указание. Найти значение x , при котором $\left(\frac{1,5}{1,05^{12}}\right)^x = \frac{1}{2}$.

Ответ. Примерно через 4 года.

13. [7] Найти все корни уравнения:

1) $5^x \cdot 2^{\frac{2+x}{x}} = 40$, если α такое число, что $8^\alpha = 5$;

2) $2^x \cdot 5^{\frac{1+x}{x}} = 50$, если α такое число, что $5^\alpha = 4$.

Указание. 1) Так как $40 = 2^3 \cdot 5$, то уравнение примет вид $5^{x-1} \cdot 2^{\frac{2-2x}{x}} = 1$.

Ответ. 1) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3\alpha}$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{\alpha}$.

14. [4] Найти область определения функции:

1) $y = \frac{1}{3^{x+1} - 3^{x-1} - 8}$; 2) $y = \frac{1}{5^{x-1} - 5^x + 0,8}$.

Ответ. 1) $x \neq 1$; 2) $x \neq 0$.

15. [8] При каких значениях параметра a уравнение

$$4^x - (5a - 3) \cdot 2^x + 4a^2 - 3a = 0$$

имеет единственный корень?

Указание. Сделав замену $2^x = t$, решить квадратное уравнение $t^2 - (5a - 3)t + 4a^2 - 3a = 0$. Исходное уравнение имеет единственный корень либо когда дискриминант квадратного уравнения $D = 9(a - 1)^2$ равен нулю и $t > 0$, либо когда при $D > 0$ один из корней положителен, а другой отрицателен или равен нулю.

Ответ. При $0 < a \leq \frac{3}{4}$ и $a = 1$.

16. [8] При каких значениях параметра b уравнение

$$9^x - 2(3b - 2) \cdot 3^x + 5b^2 - 4b = 0$$

имеет два различных корня?

Ответ. При $b > 0,8$, $b \neq 1$.

17. [8] При каких значениях параметра a уравнение

$$2^{(a-1)x^2 + 2(a-3)x + a} = \frac{1}{4}$$

имеет единственный корень?

Указание. Уравнение будет иметь единственный корень либо когда $a - 1 = 0$, либо когда

$$D = (2(a - 3))^2 - 4(a - 1)(a + 2) = 0.$$

Ответ. При $a = 1$ и $a = 1\frac{4}{7}$.

18. [8] При каких значениях параметра a уравнение

$$5^{2x} - (a - 5) \cdot 5^x - 5a = 0$$

имеет хотя бы один корень?

Указание. Решить квадратное уравнение $t^2 - (a - 5)t - 5a = 0$ относительно $t = 5^x > 0$.

Ответ. При $a > 0$.

19. [4] Найти значение $8 \cdot 9^b$, если $27^b = 0,125$. Ответ. 2.

20. [9] Решить уравнение $2^{5x-1} \cdot 3^{4x+1} \cdot 7^{3x+3} = 504^{x-2}$.

Ответ. $-2,5$.

21. [9] Решить уравнение $2^{13-x} \cdot 3^{11-2x} \cdot 5^{9-3x} = 360^{x+2}$.

Ответ. $1,75$.

22. [10] При каких значениях параметра p уравнение $15 \cdot 10^x - 20 = p - p \cdot 10^{x+1}$ не имеет корней?

Ответ. При $p \in [-20; -1,5]$.

23. [10] Найти все положительные значения параметра a , при которых в области определения функции $y = (a^x - a^{ax+2})^{-0,5}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трёхзначного натурального числа.

Ответ. $a \in (0,8; 0,98]$.

Задания для интересующихся математикой

Примеры с решениями

Решить неравенство $2 \cdot 4^x \geq 6^x + 3 \cdot 9^x$.

Решение. Разделив обе части данного неравенства на 9^x и полагая $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, получим неравенство $2t^2 - t - 3 \geq 0$, равносильное неравенству $2\left(t - \frac{3}{2}\right)(t + 1) \geq 0$, откуда $t \geq \frac{3}{2}$, так как $t > 0$. Значит, исходное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{3}{2}$, откуда $x \leq -1$.

Ответ. $x \leq -1$.

Решить уравнение $3^x + 4^x = 25$.

Решение. Число 2 является корнем этого уравнения, так как $3^2 + 4^2 = 25$. Докажем, что уравнение не имеет других корней. Так как каждая из функций 3^x и 4^x является возрастающей, то и функция $f(x) = 3^x + 4^x$ также возрастающая функция. Поэтому $f(x) < f(2) = 25$ при $x < 2$ и $f(x) > f(2)$ при $x > 2$, т. е. функция не принимает значение, равное 25, при $x \neq 2$. Это означает, что $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Ответ. $x = 2$.

Решить неравенство

$$\frac{15 - 16^{x+1}}{4^{2x} - 4} \geq 2^{4x+1} - 3. \quad (1)$$

Решение. Положим $t = 16^x$, тогда неравенство (1) примет вид

$$\frac{15 - 16t}{t - 4} \geq 2t - 3. \quad (2)$$

Неравенство (2) равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{2t^2 + 5t - 3}{t - 4} &\leq 0, \\ (t + 3) \left(t - \frac{1}{2} \right) &\leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $t > 0$, то неравенство (3) равносильно неравенству

$$\frac{t - \frac{1}{2}}{t - 4} \leq 0,$$

откуда получаем $\frac{1}{2} \leq t < 4$, т. е. $\frac{1}{2} \leq 16^x < 4$.

Ответ. $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x-y} = 15 + 9^{x+y}, \\ 8^{x-y} - 21 \cdot 2^{x-y} = 27^{x+y} - 7 \cdot 3^{x+y+1}. \end{cases}$$

Решение. Положим $2^{x-y} = u$, $3^{x+y} = v$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} u^2 = 15 + v^2, \\ u^3 - v^3 = 21(u - v). \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 15, \\ u - v = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 15, \\ u^2 + uv + v^2 = 21. \end{cases} \quad (3)$$

Система (2) не имеет решений. Система (3) является однородной. Разделив почленно её уравнения на v^2 и полагая $\frac{u}{v} = t$, получаем

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 + t + 1} = \frac{5}{7} \quad \text{или} \quad 2t^2 - 5t - 12 = 0,$$

откуда $t_1 = 4$, $t_2 = -\frac{3}{2}$. Значение t_2 следует отбросить, так как $u > 0$, $v > 0$. Если $t = 4$, т. е. $u = 4v$, то из первого уравнения системы (3) находим $v = 1$. Итак, $v = 1$, $u = 4$, т. е. $3^{x+y} = 1$, $2^{x+y} = 4$, откуда $x = 1$, $y = -1$.

Ответ. (1; -1).

Задания для самостоятельной работы

1. Решить уравнение:

1) $5^x - 4 = 5^{1-x}$;

2) $2 \cdot 9^x - 6^x = 3 \cdot 4^x$;

3) $2^x + 3^x - 0,5^x = 0,2^x + 0,3^x - 4^x$.

Ответ. 1) $x = 1$; 2) $x = 1$; 3) $x = 0$.

2. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2 \cdot 15^x + 15^y = 5^x \cdot 3^{-y}, \\ 2 \cdot 3^{x-y} - 5^{y-x} = 3 \cdot 9^x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^{x-y} - 2 \cdot 6^{x-y} = 6^{-2y}, \\ 3^{x-y+1} + 6^{-x-y} = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 64^y = 36, \\ 5^x \cdot 512^y = 200. \end{cases}$

Ответ. 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(2; \frac{1}{3}\right)$.

3. Решить неравенство:

$$1) 8^x < 6 \cdot 4^{\frac{3-x}{2}} + 2^{1+x};$$

$$2) 9^{\frac{x+1}{2}} + 3^{2-x} < 27^{1-x}.$$

Ответ. 1) $x < \frac{3}{2}$; 2) $x < \frac{1}{2}$.

4. Построить график функции:

$$1) y = 1 - 2^{|x+1|}; \quad 2) y = 1 + 2^{-|x+1|}.$$

Ответ. 1) См. рис. 26; 2) см. рис. 27.

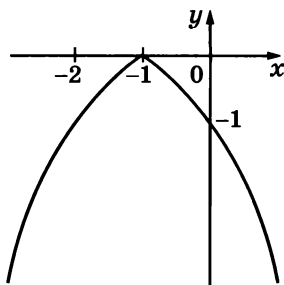


Рис. 26

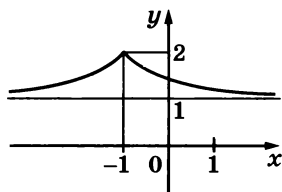


Рис. 27

§ 15. Логарифмы

Справочные сведения

Логарифмом положительного числа b по основанию a (записывают $\log_a b$), где $a > 0$, $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .

Равенство

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, называют основным логарифмическим тождеством.

$x = \log_a b$ — корень уравнения $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Примеры с решениями

Найти: 1) $7^{\log_7 5}$; 2) $0,5^{0,5 \log_{0,5} 12}$; 3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_8 3}$.

Решение. 1) По определению логарифма (согласно основному логарифмическому тождеству) $7^{\log_7 5} = 5$.

2) $0,5^{0,5 \log_{0,5} 12} = (0,5^{\log_{0,5} 12})^{0,5} = 12^{0,5} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_8 3} = (8^{-1})^{\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\log_{12} \frac{1}{x-1}$; 2) $\log_{x+2} 52$.

Решение. 1) Выражение $\log_a b$ имеет смысл, когда $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$. Так как $a = 12$, $12 > 0$, $12 \neq 1$, то $\log_{12} \frac{1}{x-1}$ имеет смысл при $\frac{1}{x-1} > 0$, т. е. при $x > 1$.

2) Так как $b = 52$, $52 > 0$, то $\log_{x+2} 52$ имеет смысл при $x+2 > 0$ и $x+2 \neq 1$, т. е. при $x > -2$ и $x \neq -1$.

Решить уравнение: 1) $\log_5 (x-1) = 3$; 2) $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 6$.

Решение. 1) Из равенства $\log_5 (x-1) = 3$ по определению логарифма следует, что $5^3 = x-1$, откуда $x = 126$.

2) Корень уравнения $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) есть число $x = \log_a b$. В данном случае $x = \log_{\frac{2}{7}} 6$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить (1—14).

1. $\boxed{2} 5,1^{\log_{5,1} 9}$.
2. $\boxed{4} 7^{2 \log_7 16}$.
3. $\boxed{4} 12^{1 + \log_{12} 4}$.
4. $\boxed{4} 8^{\log_2 \frac{1}{3}}$.
5. $\boxed{4} 3^{2 - \log_3 9}$.
6. $\boxed{5} 3^{0,4 \log_3 (4\sqrt{2})}$.
7. $\boxed{3} \log_2 \frac{1}{32}$.
8. $\boxed{4} \log_{27} 9$.
9. $\boxed{4} \log_{\frac{1}{2}} 8$.
10. $\boxed{5} \log_{\sqrt{3}} 27$.
11. $\boxed{6} \log_{3\sqrt{2}} \frac{1}{18}$.
12. $\boxed{6} \log_{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{8}{27}$.
13. $\boxed{5} \log_2 \log_4 256$.
14. $\boxed{5} \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} \log_3 9$.

Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение (15—25).

15. $\boxed{2} \log_{\frac{1}{2}} (4 - x)$.
16. $\boxed{3} \log_4 \frac{1}{3 - 2x}$.
17. $\boxed{3} \log_3 \sqrt{x - 1}$.
18. $\boxed{4} \log_2 \frac{x - 5}{x + 7}$.
19. $\boxed{5} \log_a \frac{7 - 3x}{x - 4}$, где $a \geq 3$.
20. $\boxed{4} \log_{\frac{2}{3}} (x^2 - 16)$.
21. $\boxed{4} \log_9 (x^2 + 3x + 9)$.
22. $\boxed{4} \log_7 (x^2 - 8x + 7)$.
23. $\boxed{5} \log_9 (2x - x^2 - 1)$.
24. $\boxed{6} \log_x (5 - 3x)$.
25. $\boxed{6} \log_{x+1} (x - 3)$.

Решить уравнение (26—40).

26. $\boxed{2} \log_2 x = 5$.
27. $\boxed{3} \log_3 x = \frac{1}{4}$.
28. $\boxed{3} \log_{\frac{1}{32}} x = -0,2$.
29. $\boxed{3} \log_4 (x + 5) = 2$.
30. $\boxed{4} \log_2 (x^2 - 3x - 8) = 1$.
31. $\boxed{4} \log_x 81 = 4$.
32. $\boxed{4} \log_x \frac{1}{32} = 5$.
33. $\boxed{4} \log_x \frac{1}{8} = -3$.
34. $\boxed{4} \log_x 25 = \frac{1}{2}$.
35. $\boxed{4} \log_x 5 = 2$.
36. $\boxed{4} \log_x 3 = -\frac{1}{3}$.
37. $\boxed{3} 3^x = 4$.
38. $\boxed{4} 8^{2x-1} = 5$.
39. $\boxed{4} 36^x + 6^x - 42 = 0$.
40. $\boxed{4} 9^x - 4 \cdot 3^x = -4$.

Решить относительно x уравнение (41—44).

41. $\boxed{6} 7^x = a$.
42. $\boxed{5} \log_{\frac{1}{2}} x = n$.
43. $\boxed{6} \log_a x = -2$.
44. $\boxed{7} \log_{2a - a^2 - 1} x = 3$.

Вариант II

Вычислить (1—14).

1. $\boxed{2} \left(\frac{2}{9} \right)^{\log_2 \frac{18}{9}}$.
2. $\boxed{4} 5^{3 \log_5 20}$.
3. $\boxed{4} 7^{2 + \log_7 3}$.
4. $\boxed{4} 81^{\log_9 15}$.
5. $\boxed{4} 4^{3 - \log_4 64}$.
6. $\boxed{5} 6^{\frac{2}{7} \log_6 (8\sqrt{2})}$.

7. $\boxed{3} \log_2 0,125$. 8. $\boxed{4} \log_8 \frac{1}{4}$. 9. $\boxed{4} \log_{\frac{1}{9}} 27$.
 10. $\boxed{5} \log_{\sqrt[3]{2}} 8$. 11. $\boxed{6} \log_{2\sqrt{3}} \frac{1}{12}$. 12. $\boxed{6} \log_{\frac{\sqrt{6}}{3}} 2\frac{1}{4}$.
 13. $\boxed{5} \log_3 \log_4 64$. 14. $\boxed{5} 2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 125$.

Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение (15—25).

15. $\boxed{2} \log_{0,2} (7 - x)$. 16. $\boxed{3} \log_5 \frac{5}{2 - 3x}$. 17. $\boxed{3} \log_7 \sqrt{2 - x}$.
 18. $\boxed{4} \log_3 \frac{x + 3}{x - 4}$. 19. $\boxed{5} \log_a \frac{x + 1}{8 - 5x}$, где $0,1 < a < 0,7$.
 20. $\boxed{4} \log_6 \left(x^2 - \frac{1}{4} \right)$. 21. $\boxed{4} \log_2 (x^2 - 2x + 3)$.
 22. $\boxed{4} \log_8 (x^2 - 8x + 15)$. 23. $\boxed{5} \log_{13} (3x - 4 - x^2)$.
 24. $\boxed{6} \log_x (7 - 4x)$. 25. $\boxed{6} \log_{x-2} (x - 1)$.

Решить уравнение (26—40).

26. $\boxed{2} \log_3 x = 4$. 27. $\boxed{3} \log_2 x = \frac{1}{3}$.
 28. $\boxed{3} \log_{32} x = -0,2$. 29. $\boxed{3} \log_3 (x - 2) = 3$.
 30. $\boxed{4} \log_3 (x^2 - x - 3) = 1$. 31. $\boxed{4} \log_x 32 = 5$.
 32. $\boxed{4} \log_x \frac{1}{27} = 3$. 33. $\boxed{4} \log_x \frac{1}{16} = -4$. 34. $\boxed{4} \log_x 8 = \frac{1}{3}$.
 35. $\boxed{4} \log_x 7 = 2$. 36. $\boxed{4} \log_x 7 = -\frac{1}{2}$. 37. $\boxed{3} 5^x = 3$.
 38. $\boxed{4} 9^{1-x} = 4$. 39. $\boxed{4} 25^x + 5^x - 30 = 0$.
 40. $\boxed{4} 16^x + 9 = 6 \cdot 4^x$.

Решить относительно x уравнение (41—44).

41. $\boxed{6} 0,8^x = m$. 42. $\boxed{5} \log_{3,2} x = a$.
 43. $\boxed{6} \log_a x = -10$. 44. $\boxed{7} \log_{4a - a^2 - 4} x = 1$.

§ 16. Свойства логарифмов

Справочные сведения

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число, то:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$\log_a b^r = r \log_a b, \text{ в частности } \log_a a^r = r.$$

Примеры с решениями

Вычислить:

1) $\log_9 45 + \log_9 1,8$; 2) $\log_{11} \sqrt[5]{121}$;

3) $2 \log_{0,3} 3 - \frac{1}{2} \log_{0,3} 10\,000$.

Решение.

1) $\log_9 45 + \log_9 1,8 = \log_9 (45 \cdot 1,8) = \log_9 81 = 2$;

2) $\log_{11} \sqrt[5]{121} = \log_{11} 121^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log_{11} 121 = \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}$;

3) $2 \log_{0,3} 3 - \frac{1}{2} \log_{0,3} 10\,000 = \log_{0,3} 3^2 - \log_{0,3} 10\,000^{\frac{1}{2}} =$
 $= \log_{0,3} 9 - \log_{0,3} 100 = \log_{0,3} \frac{9}{100} = \log_{0,3} 0,09 = 2$.

Зная, что $\log_5 a = 4$, $\log_5 b = 7$, найти:

1) $\log_5 (ab^3)$; 2) $\log_5 \frac{\sqrt{a}}{b^2}$.

Решение.

1) $\log_5 (ab^3) = \log_5 a + \log_5 b^3 = \log_5 a + 3 \log_5 b = 4 + 3 \cdot 7 = 25$;

2) $\log_5 \frac{\sqrt{a}}{b^2} = \log_5 a^{\frac{1}{2}} - \log_5 b^2 = \frac{1}{2} \log_5 a - 2 \log_5 b =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot 7 = -12$.

Даны числа: 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{2}{3}$. Записать каждое из них в виде логарифма некоторого числа по основанию 2.

Решение.

1) $1 = \log_2 2^1 = \log_2 2$; 2) $0 = \log_2 1$;

3) $-\frac{2}{3} = \log_2 2^{-\frac{2}{3}} = \log_2 \sqrt[3]{2^{-2}} = \log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить (1—9).

1. [2] $\log_{12} 3 + \log_{12} 4$.

2. [3] $\log_{\frac{1}{6}} 4 + \log_{\frac{1}{6}} 9$.

3. [3] $\log_4 192 - \log_4 3$.

4. [3] $\log_2 13 - \log_2 1^{\frac{5}{8}}$.

5. [3] $\log_3 9^{10}$.

6. [4] $\log_{15} \sqrt[3]{225}$.

7. [5] $\frac{1}{2} \log_3 \frac{4}{81} - \frac{1}{3} \log_3 \frac{8}{27}$.

8. [5] $\log_2 0,8 - \log_2 1^{\frac{1}{8}} + \log_2 22,5$.

9. [6] $2 \log_{\frac{1}{5}} 10 - \log_{\frac{1}{5}} 28 + \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{49}$.

10. [5] Зная, что $\log_2 a = 14$, найти: 1) $\log_2 (8a)$; 2) $\log_2 a^3$.

11. [6] Зная, что $\log_3 a = 2$, $\log_3 b = 6$, найти:
 1) $\log_3(a^2b)$; 2) $\log_3 \frac{a}{\sqrt[4]{b}}$.
12. [4] Какие из выражений
 $\log_2 5^{-3}$, $\log_2(-5)$, $\log_2(-5)^3$, $\log_2(-5)^2$, $2^{\log_2 \frac{1}{2}}$, $\log_2 \log_2 \frac{1}{2}$
 имеют смысл?
13. [3] Записать в виде логарифма некоторого числа по основанию 10 число: 1) 1; 2) 5; 3) $-\frac{1}{2}$.

Вариант II

Вычислить (1—9).

1. [2] $\log_{15} 5 + \log_{15} 3$. 2. [3] $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 2$.
3. [3] $\log_5 50 - \log_5 2$. 4. [3] $\log_3 \frac{1}{6} - \log_3 40,5$.
5. [3] $\log_2 8^7$. 6. [4] $\log_{13} \sqrt[5]{169}$. 7. [5] $2 \log_{10} 3 - \frac{1}{2} \log_{10} 0,81$.
8. [5] $\log_3 3,6 - \log_3 1,4 + \log_3 1\frac{1}{6}$.
9. [6] $\frac{5}{3} \log_{\frac{2}{3}} \sqrt[5]{8} - 3 \log_{\frac{2}{3}} 3 + \frac{1}{2} \log_{\frac{2}{3}} 36$.
10. [5] Зная, что $\log_3 b = 9$, найти: 1) $\log_3(9b)$; 2) $\log_3 b^4$.
11. [6] Зная, что $\log_2 m = 9$, $\log_2 n = 2$, найти:
 1) $\log_2(mn^3)$; 2) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{m}}{n^2}$.
12. [4] Какие из выражений
 $\log_3(-2)$, $\log_3(-2)^2$, $\log_3(-2)^3$, $\log_3 2^{-3}$, $3^{\log_3 \frac{1}{3}}$, $\log_3 \log_3 \frac{1}{3}$
 имеют смысл?
13. [3] Записать в виде логарифма некоторого числа по основанию 12 число: 1) 0; 2) -2; 3) $\frac{1}{3}$.

§ 17. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода

Справочные сведения

Вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$ (читается «десятичный логарифм числа b »).

Вместо $\log_e b$ пишут $\ln b$ (читается «натуральный логарифм числа b »).

Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ где } b > 0, a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1.$$

Частные случаи формулы перехода:

а) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$;

б) $\log_{a^\alpha} b = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0, \alpha \neq 0$.

Примеры с решениями

Зная, что $\lg 2 \approx 0,301$, $\lg 3 \approx 0,477$, найти:

1) $\log_2 3$; 2) $\log_3 \sqrt[3]{4}$.

Решение.

1) $\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx \frac{0,477}{0,301} \approx 1,58$;

2) $\log_3 \sqrt[3]{4} = \log_3 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_3 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx \frac{2 \cdot 0,301}{3 \cdot 0,477} \approx 0,421$.

Решить уравнение:

1) $\log_3 x = \log_3 2 - 4 \log_9 5$; 2) $\log_4 x^2 + \log_{\sqrt{2}} x = 12$;

3) $\log_6^2 x + 2 \log_{36} x = 6$.

Решение.

1) Преобразуем правую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \log_3 2 - 4 \log_9 5 &= \log_3 2 - 4 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 9} = \log_3 2 - \frac{4 \log_3 5}{2} = \\ &= \log_3 2 - 2 \log_3 5 = \log_3 2 - \log_3 25 = \log_3 \frac{2}{25}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\log_3 x = \log_3 \frac{2}{25}$, откуда $x = \frac{2}{25}$, $x = 0,08$.

Ответ. $x = 0,08$.

2) Учитывая, что $x > 0$, получим: $\log_4 x^2 = \frac{\log_2 x^2}{\log_2 4} = \frac{2 \log_2 x}{2} = \log_2 x$; $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} = 2 \log_2 x$. Тогда исходное урав-

нение запишем в виде $\log_2 x + 2 \log_2 x = 12$, откуда $3 \log_2 x = 12$, $\log_2 x = 4$, т. е. $x = 2^4$, $x = 16$.

Ответ. $x = 16$.

3) Перейдём от $2 \log_{36} x$ к логарифму по основанию 6:

$$2 \log_{36} x = \frac{2 \cdot \log_6 x}{\log_6 36} = \frac{2 \log_6 x}{2} = \log_6 x.$$

Пусть $\log_6 x = t$, тогда исходное уравнение запишем в виде $t^2 + t = 6$, или $t^2 + t - 6 = 0$, откуда $t_1 = -3$, $t_2 = 2$. Если $\log_6 x = -3$, то $x = \frac{1}{216}$, а если $\log_6 x = 2$, то $x = 36$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{216}$, $x_2 = 36$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [2] Выразить $\log_{16} 3$ через логарифм по основанию 2.

2. [2] Выразить $\log_{\sqrt[3]{9}} 5$ через логарифм по основанию 3.

Зная, что $\lg 2 \approx 0,301$, $\lg 3 \approx 0,477$, $\lg 5 \approx 0,699$, с точностью до 0,01 найти значение выражения (3—6).

3. [3] $\log_5 2$.

4. [4] $\log_2 \sqrt[3]{5}$.

5. [4] $\log_5 0,25$.

6. [5] $\log_3 \sqrt{125} + \log_5 27$.

7. [6] Найти $\log_{49} 28$, если $\log_7 2 = m$.

Известно, что $\log_m a = 3$. Найти значение выражения (8—11).

8. [3] $\log_a m$. 9. [4] $\log_a m^2$. 10. [4] $\log_{a^3} m$. 11. [4] $\log_{a^3} m^2$.

12. [5] С помощью МК найти с точностью до 0,01 значение $\log_8 15$.

13. [5] Найти значение выражения $\log_{11} 64 \cdot \log_{16} 11$.

14. [6] Известно, что $\log_a b = 3$, $\log_c a = 2$. Найти $\log_{ac} b$.

Решить уравнение (15—23).

15. [3] $\log_3 x = 3 \log_3 2 + 4 \log_9 5$. 16. [4] $\log_5 x^4 - 3 \log_{\frac{1}{5}} x = 14$.

17. [4] $\log_4 x + \log_8 x = 5$. 18. [5] $\log_{\sqrt[3]{5}} x - \log_{\sqrt{5}} x + \log_{\frac{5}{5}} x = 6$.

19. [5] $\log_3 x \cdot \log_{0,2} x = 4 \log_{0,2} 3$. 20. [5] $\log_2^2 x - 4 \log_4 x = 3$.

21. [6] $\log_3^2 x - \log_{\sqrt{3}} x = \log_5 0,2$. 22. [7] $\log_2 x + \log_x 2 = 2,5$.

23. [7] $\log_3 x + 2 \log_x 3 = 3$.

24. [8] Сбербанк начисляет по вкладам 12% годовых. Через какое время вклад удвоится?

Вариант II

1. [2] Выразить $\log_{27} 5$ через логарифм по основанию 3.

2. [2] Выразить $\log_{\sqrt[3]{4}} 7$ через логарифм по основанию 2.

Зная, что $\lg 2 \approx 0,301$, $\lg 3 \approx 0,477$, $\lg 5 \approx 0,699$, с точностью до 0,01 найти значение выражения (3—6).

3. [3] $\log_5 3$.

4. [4] $\log_3 \sqrt{5}$.

5. [4] $\log_2 0,04$.

6. [5] $\log_2 25 + \log_5 0,5$.

7. [6] Найти $\log_{27} 51$, если $\log_3 17 = m$.

Известно, что $\log_n a = \frac{1}{2}$. Найти значение выражения (8—11).

8. [3] $\log_a n$. 9. [4] $\log_a n^3$. 10. [4] $\log_{a^2} n$. 11. [4] $\log_{a^2} n^3$.
12. [5] С помощью МК найти с точностью до 0,001 значение $\log_{12} 9$.
13. [5] Найти значение выражения $\log_9 15 \cdot \log_{15} 27$.
14. [6] Известно, что $\log_a b = 2$, $\log_c a = \frac{1}{3}$. Найти $\log_c (ab)$.

Решить уравнение (15—23).

15. [3] $\log_2 x = 6 \log_8 9 - 2 \log_2 3$. 16. [4] $\log_7 x^5 + 2 \log_{\frac{1}{7}} x = 9$.
17. [4] $\log_9 x - \log_{27} x = \frac{2}{3}$. 18. [5] $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[3]{3}} x = 18$.
19. [5] $\log_{0,5} x \cdot \log_5 x = 9 \log_5 0,5$. 20. [5] $\log_5^2 x - 2 = 3 \log_{125} x$.
21. [6] $\log_6^2 x + \log_{\sqrt{6}} x = \log_{0,5} 2$. 22. [7] $\log_2 x - 2 \log_x 2 = -1$.
23. [7] $\log_3 x - 6 \log_x 3 = 1$.
24. [8] Некоторая разновидность бактерий размножается таким образом, что через день их количество увеличивается на 40%. Через какое время количество бактерий утроится?

§ 18. Логарифмическая функция, её свойства и график

Справочные сведения

Логарифмическая функция — это функция вида $y = \log_a x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции

1⁰. Область определения — множество всех положительных чисел ($x > 0$).

2⁰. Множество значений — множество всех действительных чисел ($y \in \mathbb{R}$).

3⁰. График функции проходит через точку (1; 0).

4⁰. На промежутке $x > 0$ функция является:

возрастающей (рис. 28) | убывающей (рис. 29)

5⁰. Функция принимает положительные значения ($y > 0$):

при $x > 1$ (рис. 28) | при $0 < x < 1$ (рис. 29)

6⁰. Функция принимает отрицательные значения ($y < 0$):

при $0 < x < 1$ (рис. 28) | при $x > 1$ (рис. 29)

При решении логарифмических уравнений и неравенств используются следующие утверждения:

1) если $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то равенство $\log_a x_1 = \log_a x_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;

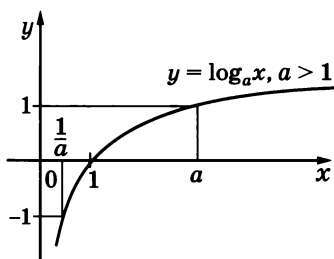


Рис. 28

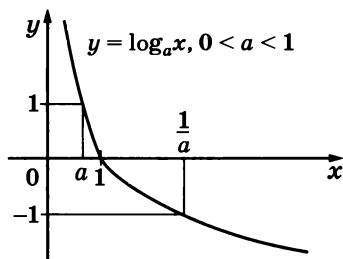


Рис. 29

2) если $a > 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то неравенство $\log_a x_1 < \log_a x_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1 < x_2$;

3) если $0 < a < 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то неравенство $\log_a x_1 < \log_a x_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2$.

Примеры с решениями

Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция: 1) $y = \log_{2,7} x$; 2) $y = \log_{0,7} x$.

Решение. 1) Так как $2,7 > 1$, то (по свойству 4⁰) функция $y = \log_{2,7} x$ возрастающая.

2) Так как $0 < 0,7 < 1$, то (согласно свойству 4⁰) функция $y = \log_{0,7} x$ убывающая.

Изобразить схематически график функции $y = \log_5 x$.

Решение. При схематическом построении графика функции $y = \log_5 x$ (рис. 30) учитываем, что: функция определена при $x > 0$; график функции проходит через точку $(1; 0)$; функция возрастающая, поскольку основание логарифма $5 > 1$.

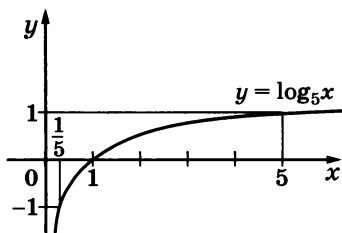


Рис. 30

Для более точного приближения схемы графика к графику функции $y = \log_a x$ можно учитывать, что он проходит через точки $(a; 1)$ и $(\frac{1}{a}; -1)$.

В данном случае график функции проходит через точки $(5; 1)$ и $(\frac{1}{5}; -1)$ (рис. 30).

Сравнить числа: 1) $\log_5 \frac{1}{2}$ и $\log_5 \frac{1}{3}$; 2) $\log_{0,4} \frac{1}{3}$ и $\log_{0,4} 0,3$.

Решение.

1) Функция $y = \log_5 x$ возрастающая, поскольку основание $5 > 1$; так как $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, то $\log_5 \frac{1}{2} > \log_5 \frac{1}{3}$.

2) Функция $y = \log_{0,4} x$ убывающая ($0 < 0,4 < 1$) и $\frac{1}{3} > 0,3$, поэтому $\log_{0,4} \frac{1}{3} < \log_{0,4} 0,3$.

Выяснить, положительным или отрицательным является число:

1) $\lg 0,5$; 2) $\log_{\frac{1}{6}} 0,8$.

Решение.

1) Согласно свойству 6^0 функция $y = \lg x$ (основание логарифма $10 > 1$) при $x = 0,5$ ($0 < 0,5 < 1$) принимает отрицательное значение, т. е. $\lg 0,5 < 0$ (рис. 31).

2) В силу свойства 5^0 функция $y = \log_{\frac{1}{6}} x$ (основание логарифма $0 < \frac{1}{6} < 1$) при $x = 0,8$ ($0 < 0,8 < 1$) принимает положительное значение, т. е. $\log_{\frac{1}{6}} 0,8 > 0$ (рис. 32).

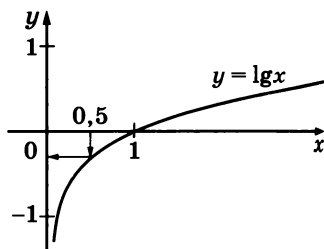


Рис. 31

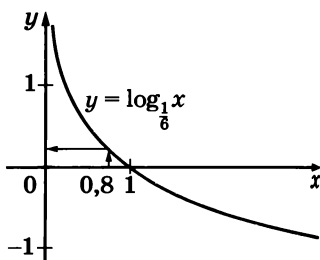


Рис. 32

Сравнить с единицей число x , если:

1) $\ln x = 0,7$; 2) $\log_{\frac{2}{7}} x = -8$.

Решение. Иллюстрируя свойства 5^0 и 6^0 схемами графиков логарифмических функций (возрастающих или убывающих, в зависимости от основания логарифма), находим: 1) $x > 1$; 2) $x > 1$.

Решить уравнение:

1) $\log_5 (1 - 3x) = \log_5 10$; 2) $\log_3 (5 - x) = 2$.

Решение.

1) Согласно утверждению 1 (см. справочные сведения) имеем $1 - 3x = 10$, откуда $x = -3$.

2) I способ. Так как $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$, то уравнение $\log_3 (5 - x) = 2$ можно записать в виде $\log_3 (5 - x) = \log_3 9$, откуда $5 - x = 9$, $x = -4$.

II способ. На основании определения логарифма имеем $3^2 = 5 - x$, $9 = 5 - x$, $x = -4$.

Решить неравенство:

1) $\log_7 x < \log_7 12$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 3$.

Решение.

1) Согласно утверждению 2 (см. справочные сведения) неравенство $\log_7 x < \log_7 12$ выполняется при $x > 0$ и $x < 12$, т. е. при $0 < x < 12$.

2) Запишем данное неравенство в виде $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$.

Согласно утверждению 3 (см. справочные сведения) это неравенство выполняется, когда $\begin{cases} x > 0, \\ x \leq \frac{1}{8}. \end{cases}$ Итак, $0 < x \leq \frac{1}{8}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

С помощью графика функции $y = \log_2 x$ (рис. 33) выполнить задания (1—4).

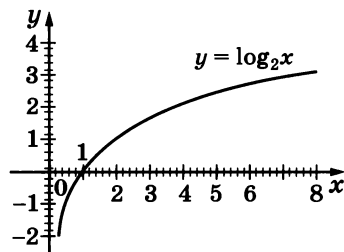


Рис. 33

1. [2] Найти приближённые значения $\log_2 0,3$; $\log_2 0,6$; $\log_2 3$; $\log_2 7$.

2. [2] Сравнить $\log_2 5,5$ и $\log_2 7,5$; $\log_2 0,8$ и $\log_2 0,2$.

3. [2] Сравнить $\log_2 5$ и $2,8$.

4. [1] Определить знак числа (сравнить с нулём): $\log_2 0,7$; $\log_2 1,3$.

Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция (5—6).

5. [1] $y = \log_{0,03} x$.

6. [2] $\log_{\sqrt{3}} x$.

Сравнить числа (7—11).

7. [2] $\log_9 \frac{4}{5}$ и $\log_9 \frac{6}{5}$.

8. [2] $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8}$ и $\log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{3}$.

9. [2] $\log_{0,9} \frac{4}{5}$ и $\log_{0,9} \frac{5}{6}$.

10. [2] $\log_3 8,1$ и 2 .

11. [2] 3 и $\log_{\frac{1}{3}} 0,05$.

Используя заданное соотношение, сравнить с единицей положительное число x (12—15).

12. [2] $\log_{0,4} x = 0,6$.

13. [2] $\log_{\frac{4}{3}} x = -1,3$.

14. [2] $\log_{3,8} x < 0$.

15. [2] $\log_{20}^{\frac{5}{5}} x > 0$.

Используя заданное соотношение, сравнить с единицей положительное число x (16—19).

16. [3] $\log_x 1,5 = -3$.

17. [3] $\log_x 0,5 = 0,3$.

18. [3] $\log_x 1,5 > 0$.

19. [3] $\log_x 0,5 < 0$.

Решить уравнение (20—23).

20. [2] $\log_8 (2x - 5) = \log_8 3$.

21. [2] $\ln (1 - 5x) = 0$.

22. [3] $\log_2 \left(9 - \frac{x}{2} \right) = 2$.

23. [3] $\log_{\frac{1}{7}} (3x + 4) = -1$.

Решить неравенство (24—27).

24. [3] $\log_{15} x > \log_{15} 3$.

25. [3] $\log_{\frac{2}{3}} x \geq \log_{\frac{2}{3}} 6$.

26. [4] $\log_4 x < \frac{1}{2}$.

27. [5] $\log_{\frac{1}{e}} x < -1$.

Решить графически уравнение (28—29).

28. [4] $\log_2 x = -2x + 5$.

29. [4] $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$.

Определить, какие точки с целочисленными координатами принадлежат графику функции (30—31).

30. [7] $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

31. [8] $y = \log_{\frac{3}{7}} x$.

Вариант II

С помощью графика функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ (рис. 34) выполнить задания (1—4).

1. [2] Найти приближённые значения $\log_{\frac{1}{3}} 0,3$; $\log_{\frac{1}{3}} 0,6$; $\log_{\frac{1}{3}} 5$; $\log_{\frac{1}{3}} 8$.

2. [2] Сравнить $\log_{\frac{1}{3}} 6,5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
 $\log_{\frac{1}{3}} 0,3$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0,9$.

3. [2] Сравнить $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $-1,8$.

4. [1] Сравнить с нулём $\log_{\frac{1}{3}} 0,6$; $\log_{\frac{1}{3}} 2,1$.

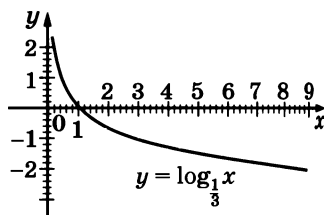


Рис. 34

Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция (5—6).

5. [1] $y = \log_{1,09} x$.

6. [2] $y = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$.

Сравнить числа (7—11).

7. [2] $\log_7 \frac{8}{7}$ и $\log_7 \frac{7}{8}$.

8. [2] $\log_{\frac{1}{3}} \frac{4}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$.

9. [2] $\log_{0,7} \frac{4}{5}$ и $\log_{0,7} \frac{3}{4}$.

10. [2] $\log_3 31$ и 3 .

11. [2] 2 и $\log_{\frac{1}{7}} 0,02$.

Используя заданное соотношение, сравнить с единицей положительное число x (12—15).

12. [2] $\log_{\frac{6}{7}} x = 0,1$.

13. [2] $\log_{0,9} x = -0,1$.

14. [2] $\log_{7,2} x > 0$.

15. [2] $\log_{30} x < 0$.

Используя заданное соотношение, сравнить с единицей положительное число x (16—19).

16. [3] $\log_x 5 = 2,5$.

17. [3] $\log_x 0,7 = -0,2$.

18. [3] $\log_x 0,7 > 0$.

19. [3] $\log_x 5 < 0$.

Решить уравнение (20—23).

20. $\boxed{2} \log_{11} (7 - 2x) = \log_{11} 13.$

21. $\boxed{2} \lg (2x + 5) = 0.$

22. $\boxed{3} \log_{\frac{2}{3}} (5x - 3) = \log_{\frac{2}{3}} 17.$

23. $\boxed{3} \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{8} - 3 \right) = 3.$

Решить неравенство (24—27).

24. $\boxed{3} \log_{3,5} x \leq \log_{3,5} 4.$

25. $\boxed{3} \log_{\frac{3}{7}} x < \log_{\frac{3}{7}} 5.$

26. $\boxed{4} \log_{\frac{1}{4}} x > \frac{1}{2}.$

27. $\boxed{5} \log_{\pi} x \geq 1.$

Решить графически уравнение (28—29).

28. $\boxed{4} \log_3 x = -x + 4.$

29. $\boxed{4} \log_{\frac{1}{2}} x = x - 6.$

Определить, какие точки с целочисленными координатами принадлежат графику функции (30—31).

30. $\boxed{7} y = \log_2 x.$

31. $\boxed{8} y = \log_{\frac{9}{8}} x.$

§ 19. Логарифмические уравнения

Примеры с решениями

Выяснить, какое из уравнений

$$(x - 5)(x - 3) = 0 \text{ и } x - 5 = 0$$

является следствием другого.

Решение. Первое уравнение имеет корни $x_1 = 5$ и $x_2 = 3$, а второе — единственный корень $x = 5$. Поэтому первое уравнение является следствием второго.

Выяснить, равносильны ли уравнения:

1) $2x - 6 = 0$ и $x - 3 = 0$;

2) $2^x - x - 5 = 0$ и $2^x = x + 5$;

3) $x \lg(x + 2) = -x$ и $\lg(x + 2) = -1$.

Ответ. 1) Равносильны; 2) равносильны; 3) не равносильны, так как множества их корней различны (в первом уравнении $x_1 = -1,9$, $x_2 = 0$; во втором уравнении $x = -1,9$).

Замечание. Деление обеих частей уравнения на выражение с неизвестным, которое может принимать равное нулю значение, часто приводит к потере корня.

Решить уравнение $\log_5(x + 4) + \log_5 x = 1$.

Решение. Заменяя данное уравнение (на основании свойства суммы логарифмов) его следствием, получим $\log_5((x + 4)x) = 1$. Решим это уравнение. Имеем $\log_5((x + 4)x) = \log_5 5$, откуда

$$(x + 4)x = 5, \quad x^2 + 4x - 5 = 0; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -5.$$

Проверка. 1) $x = 1$ является корнем исходного уравнения, так как $\log_5(1 + 4) + \log_5 1 = 1$; 2) $x = -5$ не является корнем исходного уравнения, поскольку при $x = -5$ левая часть уравнения теряет смысл. Ответ. $x = 1$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [4] Выяснить, какое из двух данных уравнений является следствием другого:

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x + 4) = 3 \text{ и } \log_2((x - 3)(x + 4)) = 3.$$

Записать какое-нибудь следствие уравнения (2—5).

2. [6] $\log_2(x - 1) = 1$. 3. [5] $\log_3(x - 2) + \log_3(x + 4) = 3$.
4. [6] $\log_3(x^2 - 5x + 4) - \log_3(x - 4) = 2$.
5. [5] $2 \log_5(x - 4) = \log_5(3x - 2)$.

Выяснить, равносильны ли уравнения (6—7).

6. [5] $\log_2(x - 5) = \log_2(2x - 1)$ и $x - 5 = 2x - 1$.
7. [5] $\log_3(x + 5) = \log_3(2x + 1)$ и $x + 5 = 2x + 1$.

Решить уравнение (8—24).

8. [4] $\lg(x + \sqrt{3}) + \lg(x - \sqrt{3}) = 0$.
9. [4] $\log_2(x - 2) + \log_2(x - 3) = 1$.
10. [4] $\lg(x^2 - 9) - \lg(x - 3) = 0$.
11. [4] $\log_6(x - 1) - \log_6(2x - 11) = \log_6 2$.
12. [5] $\log_7(2x^2 - 7x + 6) - \log_7(x - 2) = \log_7 x$.
13. [5] $\log_4(x^3 - x) - \log_4 x = \log_4 3$.
14. [5] $\log_2 \frac{2}{x-1} = \log_2 x$. 15. [5] $\lg \frac{x+8}{x-1} = \lg x$.
16. [6] $\frac{1}{2} \lg(x^2 + x - 5) = \lg(5x) + \lg \frac{1}{5x}$.
17. [7] $\log_3(x - 1) + 2 \log_9(17 + x) = 7 + \log_{\frac{1}{3}} 9$.
18. [8] $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.
19. [4] $\log_{0,7} \log_4(x - 5) = 0$. 20. [5] $\log_{13} \log_3 \log_2(x^2 + 2x) = 0$.
21. [4] $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 = 0$.
22. [4] $\log_2^2(1 - x) - 2 \log_2(1 - x) = 3$.
23. [5] $2 \log_2 x = 3 \log_3 x$. 24. [6] $2 \log_2 x - 5 \log_x 2 = 3$.

Решить систему уравнений (25—30).

25. [7] $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 2, \\ 2y^2 + x - 11 = 0. \end{cases}$ 26. [6] $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 2, \\ 3x - y = 10. \end{cases}$

$$27. \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 7, \\ \log_2 x + 2\log_4 y = 6. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} y = 2, \\ \log_8(x - y - 1)^3 + \log_2(x - y + 1) = \log_2 3. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 3^x + 4^y = 11, \\ 9^x + 2^{4y} = 3^{x+1} 4^y + 31. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 3^y = 21, \\ \frac{21}{7^{1-x}} + 6 \cdot 3^y = 51. \end{cases}$$

Вариант II

1. [4] Выяснить, какое из двух данных уравнений является следствием другого:

$$2\log_3(3x - 4) = 7 \text{ и } \log_3(3x - 4)^2 = 7.$$

Записать какое-нибудь следствие уравнения (2—5).

$$2. [6] \log_3(x + 5) = 2. \quad 3. [5] \log_2(x + 1) + \log_2(x - 3) = 5.$$

$$4. [6] \log_5(x^2 - 5x + 6) - \log_5(x - 2) = 1.$$

$$5. [5] \log_3(4x - 7) = 2\log_3(x - 1).$$

Выяснить, равносильны ли уравнения (6—7).

$$6. [5] \log_3(x + 5) = \log_3(5x - 11) \text{ и } x + 5 = 5x - 11.$$

$$7. [5] \log_4(x - 1) = \log_4(2x + 1) \text{ и } x - 1 = 2x + 1.$$

Решить уравнение (8—24).

$$8. [4] \lg(x - 1) + \lg(x + 1) = 0.$$

$$9. [4] \log_3(5 - x) + \log_3(-1 - x) = 3.$$

$$10. [4] \log_5(x^2 - 4) - \log_5(x - 2) = 0.$$

$$11. [4] \ln(3x - 1) - \ln(x + 5) = \ln 5.$$

$$12. [5] \log_{11}(2x^2 - 9x + 5) - \log_{11} x = \log_{11}(x - 3).$$

$$13. [5] \log_5(x^3 + x) - \log_5 x = \log_5 10.$$

$$14. [5] \log_{0,5} \frac{10}{7 - x} = \log_{0,5} x. \quad 15. [5] \lg \frac{x - 4}{x - 2} = \lg x.$$

$$16. [6] \frac{1}{2} \lg(x^2 - 4x - 1) = \lg(8x) - \lg(4x).$$

$$17. [7] \log_2(x + 1) + 2\log_4(x + 5) = 8 + \log_{\frac{1}{2}} 8.$$

$$18. [8] 2\log_5 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{5}} x = 8.$$

$$19. [4] \log_{11,2} \log_{0,3}(x - 4) = 0.$$

$$20. [5] \log_{0,8} \log_2 \log_3(x^2 + 3x - 1) = 0.$$

$$21. [4] \log_{0,2}^2 x + \log_{0,2} x - 6 = 0.$$

$$22. [4] \log_{\frac{1}{2}}^2(x - 3) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) = 2.$$

$$23. [5] 3\log_4 x = 2\log_3 x. \quad 24. [6] 3\log_9 x + 2\log_x 9 = 5.$$

Решить систему уравнений (25—30).

$$25. \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 3, \\ 4y^2 + x - 5 = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \ln x - \ln y = \ln 3, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \log_2(x + y) = 4, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2\log_6 x + \log_{\sqrt{6}} y = 2, \\ \log_3(3x - 3y + 1) + \log_{27}(3x - 3y - 1)^3 = \log_3 8. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 5^x + 3^y = 8, \\ 25^x + 9^y = 5 \cdot 3^{y+1} - 11. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2^x + 2 \cdot 5^{y+1} = 25, \\ 3 \cdot 2^{x+2} - 4 \cdot 5^y = 52. \end{cases}$$

§ 20. Логарифмические неравенства

Справочные сведения

Простейшие логарифмические неравенства

$$\log_a x > b, \quad (1)$$

$$\log_a x < b, \quad (2)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, имеют решения при любом $b \in \mathbf{R}$.

Если $a > 1$ (рис. 35), то множество решений неравенства (1) — промежутки $x > a^b$, а множество решений неравенства (2) — интервал $0 < x < a^b$.

Если $0 < a < 1$ (рис. 36), то множество решений неравенства (1) — интервал $0 < x < a^b$, а множество решений неравенства (2) — промежуток $x > a^b$.

Неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно двойному неравенству $f(x) > g(x) > 0$, а при $0 < a < 1$ — двойному неравенству $0 < f(x) < g(x)$.

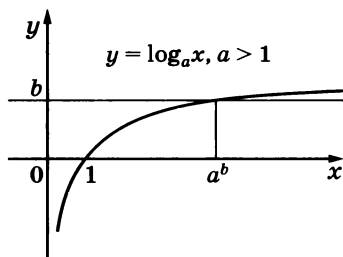


Рис. 35

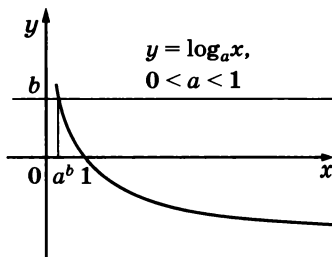


Рис. 36

Примеры с решениями

Найти область определения неравенства

$$\log_2(x-1) + 2\log_2(x^2-25) > 3.$$

Решение. Область определения данного неравенства — множество значений x , при которых выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны, т. е. множество значений x , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x^2-25 > 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства системы — промежуток $x > 1$; множество решений второго неравенства состоит из двух промежутков $x < -5$ и $x > 5$. Оба неравенства системы выполняются при $x > 5$.

Ответ. $x > 5$.

Решить неравенство: 1) $\log_5(x+8) > 2$; 2) $\log_5(x+8) < 2$;
3) $\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 2$.

Решение. 1) Так как $2 = \log_5 25$, то данное неравенство можно записать в виде $\log_5(x+8) > \log_5 25$. Согласно свойству возрастания функции $y = \log_5 x$ данное неравенство равносильно неравенству $x+8 > 25$.

Ответ. $x > 17$.

2) Запишем данное неравенство в виде

$$\log_5(x+8) < \log_5 25.$$

Это неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x+8 > 0, \\ x+8 < 25, \end{cases}$
откуда $\begin{cases} x > -8, \\ x < 17. \end{cases}$

Ответ. $-8 < x < 17$.

3) Данное неравенство, записанное в виде

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) - \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}} 9,$$

равносильно системе неравенств $\begin{cases} x+15 > 0, \\ x-1 > 0, \\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+15}{x-1} \geq \log_{\frac{1}{3}} 9. \end{cases}$

Эта система равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} x > -15, \\ x > 1, \\ \frac{x+15}{x-1} \leq 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x+15 \leq 9(x-1); \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ 8x \geq 24. \end{cases}$$

Ответ. $x \geq 3$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти область определения функции (1—2).

1. [1] $y = \lg(x - 5)$. 2. [3] $y = \log_3(x^2 - 4)$.

Найти область определения неравенства (3—4).

3. [4] $\log_{0,9}(3 - x) + \ln(7 - 2x) < 2$.
4. [5] $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3x - 4) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) \geq \log_2 10$.

Решить неравенство (5—38).

5. [3] $\log_2 x > 3$. 6. [3] $\log_2 x < 3$.
7. [3] $\log_{\frac{1}{2}}(x + 7) > -3$. 8. [3] $\log_{\frac{1}{2}}(x + 7) < -3$.
9. [4] $\log_2(x^2 + x + 2) > 3$. 10. [4] $\log_2(x^2 + x + 2) < 3$.
11. [4] $\log_2(x^2 - 4x + 3) > 3$. 12. [4] $\lg(2x - 3) \geq \lg(3x - 5)$.
13. [4] $\lg(2x - 3) \leq \lg(3x - 5)$. 14. [4] $\lg(2x - 4) \leq \lg(3x - 5)$.
15. [4] $\lg(2x - 3) \geq \lg(3x - 4)$.
16. [4] $\log_{0,8}(2x - 3) \geq \log_{0,8}(3x - 4)$.
17. [4] $\log_{0,8}(2x - 3) \geq \log_{0,8}(3x - 5)$.
18. [4] $\log_{0,8}(2x - 3) \leq \log_{0,8}(3x - 5)$.
19. [4] $\log_{0,8}(2x - 4) \leq \log_{0,8}(3x - 5)$.
20. [5] $\log_4(x + 6) \geq 2 \log_4 x$. 21. [5] $\log_4(x + 6) \leq 2 \log_4 x$.
22. [5] $\log_{0,1}(x + 4) \geq \log_{0,1}(x - 2)^2$.
23. [5] $\log_{0,1}(x + 4) \leq \log_{0,1}(x - 2)^2$.
24. [5] $\log_{0,7}(7x - 10) \leq 2 \log_{0,7} x$.
25. [6] $\log_4(x - 2) + \log_4(x - 8) < 2$.
26. [6] $\log_{\frac{1}{6}}(10 - x) + \log_{\frac{1}{6}}(x - 3) \geq -1$.
27. [5] $\log_{3,9}(x^2 - 3x - 9) > 0$. 28. [5] $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 8x) > -2$.
29. [5] $\log_{\frac{1}{2}}(x + 8) > \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) + \log_{\frac{1}{2}}(3x)$.
30. [6] $\log_{0,1}^2 x + \log_{0,1} x < 6$.
31. [6] $\log_3^2(x - 1) - 2 \log_3(x - 1) \leq -1$.
32. [6] $\log_2^2 x + 3 \log_2 x < -5$. 33. [7] $\log_7 \log_{\frac{1}{3}} \log_8 x > 0$.
34. [7] $\log_7 \log_{\frac{1}{3}} \log_8 x < 0$. 35. [5] $\log_5 x < a$.
36. [6] $\log_a x > 2$. 37. [7] $\log_{a+x} 2 < 0$. 38. [8] $\log_{x-a} 0,2 > 1$.

Вариант II

Найти область определения функции (1—2).

1. $\boxed{1} y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 5)$. 2. $\boxed{3} y = \ln(x^2 - 9)$.

Найти область определения неравенства (3—4).

3. $\boxed{4} \ln(x + 4) + \log_{0,3}(3x + 13) < 3$.
4. $\boxed{5} \log_3(x^2 + 3x - 10) - \log_3(x + 2) \geq \log_{\frac{1}{3}} 7$.

Решить неравенство (5—38).

5. $\boxed{3} \log_{\frac{1}{2}} x > 3$. 6. $\boxed{3} \log_{\frac{1}{2}} x < 3$.
7. $\boxed{3} \log_2(x + 5) > 3$. 8. $\boxed{3} \log_2(x + 5) < 3$.
9. $\boxed{4} \log_3(x^2 - x + 3) > 2$. 10. $\boxed{4} \log_3(x^2 - x + 3) < 2$.
11. $\boxed{4} \log_3(x^2 + 6x - 7) < 2$. 12. $\boxed{4} \ln(4x - 5) \geq \ln(5x - 8)$.
13. $\boxed{4} \ln(4x - 5) \leq \ln(5x - 8)$. 14. $\boxed{4} \ln(3x - 9) \leq \ln(4x - 11)$.
15. $\boxed{4} \ln(4x - 5) \geq \ln(3x - 6)$.
16. $\boxed{4} \log_{0,3}(4x - 5) \leq \log_{0,3}(5x - 8)$.
17. $\boxed{4} \log_{0,3}(4x - 5) \geq \log_{0,3}(5x - 6)$.
18. $\boxed{4} \log_{0,3}(4x - 5) \geq \log_{0,3}(5x - 7)$.
19. $\boxed{4} \log_{0,3}(3x - 9) \leq \log_{0,3}(4x - 11)$.
20. $\boxed{5} \log_5(2 + x) \geq 2 \log_5 x$.
21. $\boxed{5} \log_5(2 + x) \leq 2 \log_5 x$.
22. $\boxed{5} \log_{0,6}(x + 9) \geq \log_{0,6}(x + 3)^2$.
23. $\boxed{5} \log_{0,6}(x + 9) \leq \log_{0,6}(x + 3)^2$.
24. $\boxed{5} \log_{0,1}(5x - 4) \leq 2 \log_{0,1} x$.
25. $\boxed{6} \log_7(x - 3,5) + \log_7(x - 2) < 1$.
26. $\boxed{6} \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) + \log_{\frac{1}{2}}(9 - x) \geq -3$.
27. $\boxed{5} \log_{\frac{2}{3}}(x^2 + x - 11) < 0$.
28. $\boxed{5} \log_6(x^2 - 5x) < 2$.
29. $\boxed{5} \log_2(2x + 15) < \log_2(5x) + \log_2(x - 4)$.
30. $\boxed{6} \log_{\frac{1}{4}}^2 x + 2 \log_{\frac{1}{4}} x < 3$.
31. $\boxed{6} \log_{\frac{1}{5}}^2(x + 3) + 4 \log_{\frac{1}{5}}(x + 3) \leq -4$.
32. $\boxed{6} \log_{0,7}^2 x + 3 \leq 2 \log_{0,7} x$. 33. $\boxed{7} \log_5 \log_{\frac{1}{2}} \log_9 x > 0$.
34. $\boxed{7} \log_5 \log_{\frac{1}{2}} \log_9 x < 0$. 35. $\boxed{5} \log_{0,5} x > a$.
36. $\boxed{6} \log_a x < 3$. 37. $\boxed{7} \log_{x+a} 2 > 0$. 38. $\boxed{8} \log_{x-a} 2 > 1$.

Контрольная работа № 4

Вариант I

1. Вычислить:

1) $\log_{\frac{1}{2}} 16$; 2) $5^{1+\log_5 3}$; 3) $\log_3 135 - \log_3 20 + 2\log_3 6$.

2. В одной системе координат схематически построить графики функций $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ и $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

3. Сравнить числа $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}$ и $\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{5}$.

4. Решить уравнение $\log_5 (2x - 1) = 2$.

5. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} (x - 5) > 1$.

6. Решить уравнение $\log_2 (x - 2) + \log_2 x = 3$.

7. Решить уравнение $\log_8 x + \log_{\sqrt{2}} x = 14$.

8. Решить неравенство $\log_3^2 x - 2\log_3 x \leq 3$.

Вариант II

1. Вычислить:

1) $\log_3 \frac{1}{27}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}} 7}$; 3) $\log_2 56 + 2\log_2 12 - \log_2 63$.

2. В одной системе координат схематически построить графики функций $y = \log_4 x$ и $y = 4^x$.

3. Сравнить числа $\log_{0,9} 1\frac{1}{2}$ и $\log_{0,9} 1\frac{1}{3}$.

4. Решить уравнение $\log_4 (2x + 3) = 3$.

5. Решить неравенство $\log_5 (x - 3) < 2$.

6. Решить уравнение $\log_3 (x - 8) + \log_3 x = 2$.

7. Решить уравнение $\log_{\sqrt{3}} x + \log_9 x = 10$.

8. Решить неравенство $\log_2^2 x - 3\log_2 x \leq 4$.

Задания для подготовки к экзамену

1. [4] Решить неравенство:

1) $\frac{\log_{0,5}(x^2 - 3)}{\lg 3} \leq 0$; 2) $\lg(x^2 - 1) \lg 0,5 \leq 0$.

Ответ. 1) $x \leq -2, x \geq 2$; 2) $x \leq -\sqrt{2}, x \geq \sqrt{2}$.

2. [5] Найти область определения функции:

1) $y = \log_1(0,04 \cdot 5^x - 25^{3x+2})$;

2) $y = \log_2(16^{2x+1} - 0,25 \cdot 2^x)$.

Ответ. 1) $x < -1,2$; 2) $x > -\frac{6}{7}$.

3. [5] Пусть $f(x) = \log_3(5x - 2)$. Решить уравнение $f(x) = f(3x - 1)$.

Ответ. $x = \frac{1}{2}$.

4. [5] Пусть $f(x) = \log_2(8x - 1)$. Решить уравнение $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + 5\right)$.

Ответ. $x = 10$.

5. [4] Решить уравнение:

1) $(x^2 - 16) \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) = 0$; 2) $(3x^2 - x) \log_{0,5}(5x - 1) = 0$.

Ответ. 1) $x_1 = 0, x_2 = 4$; 2) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0,4$.

6. [4] Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+3} > -2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1} > -2$.

Ответ. 1) $x < -3,5, x > 1$; 2) $x < -2,5, x > 0,5$.

7. [5] Решить неравенство:

1) $\log_5 \frac{3-x}{x+2} > 0$; 2) $\log_4 \frac{5-x}{x-2} > 1$.

Ответ. 1) $-2 < x < -1\frac{1}{6}$; 2) $2 < x < 2,6$.

8. [5] Решить неравенство $(3 \log_3 x - 1)(3x - 4) \geq 0$ и определить,

является ли его решением число 1,5. Ответ. $0 < x \leq \frac{4}{3}$;
 $x \geq \sqrt[3]{3}$; $x = 1,5$ — решение неравенства.

9. [5] Найти область определения функции:

1) $y = \log_{0,4} \log_4 \frac{5-x}{x-2}$; 2) $y = \log_5 \log_{0,5} \frac{3-x}{x+2}$.

Ответ. 1) $2 < x < 3,5$; 2) $0,5 < x < 3$.

10. [6] Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > -1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x-2}{1-x} > -1$.

Ответ. 1) $1\frac{1}{2} < x < 1\frac{8}{9}$; 2) $1,1 < x < 1,5$.

11. [4] При каких значениях a выражения $(a+1) \lg(2a+3)$ и $a+1$ принимают одинаковые значения?

Ответ. При $a = -1$, $a = 3,5$.

12. [4] При каких значениях b выражения $(3b+1) \lg(1-b)$ и $3b+1$ принимают одинаковые значения?

Ответ. При $b = -\frac{1}{3}$, $b = -9$.

13. [7] Решить систему уравнений:

$$1) \begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3. \end{cases}$$

Ответ. 1) $x = \frac{1}{9}$, $y = \frac{1}{81}$; 2) $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. [9] Решить систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x^{0,5 + \log_y x} = \sqrt{y}, \\ \log_{x+1} \frac{xy + y}{x} = 1 + \log_{x+1}(3 + 4x^2); \end{cases}$$
$$2) \begin{cases} y^{1 - 0,2 \log_x y} = x^{\frac{4}{5}}, \\ 2 + \log_x \left(1 - \frac{3y}{x^2} \right) = \log_x 4. \end{cases}$$

Указание. 1) Так как $\sqrt{y} = (x^{\log_x y})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2 \log_y x}}$, то первое уравнение системы сводится к уравнению $(0,5 + \log_y x) \times \times 2 \log_y x = 1$. Решив полученное квадратное уравнение относительно $\log_y x$, находим: а) $\log_y x = -1$; б) $\log_y x = \frac{1}{2}$, т. е. а) $x = \frac{1}{y}$; б) $x = \sqrt{y}$ ($y > 0$ и $y \neq 1$).

Ответ. 1) $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$; 2) $x = 4$, $y = 4$.

15. [6] Решить уравнение $1 + \log_x(4-x) = \log_5 3 \cdot \log_x 5$.

Указание. Согласно формуле перехода $\log_5 3 = \frac{\log_x 3}{\log_x 5}$ ис-

ходное уравнение преобразуется к уравнению $x \cdot (4-x) = 3$, которое является его следствием.

Ответ. $x = 3$.

16. [6] Решить уравнение $1 - \log_9(x+1)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x+5}{x+3}$.

Указание. Учитывая, что $\log_9(x+1)^2 = 2 \log_9 |x+1|$, пе-

рейти к следствию исходного уравнения: $\frac{3}{|x+1|} = \frac{x+5}{x+3}$.

Ответ. $x_1 = -7$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

17. [7] Найти значение выражения

$$\log_{\pi^2} \left(\frac{a^2 b}{\pi^3} \right), \text{ если } \log_{\pi} \sqrt{a} = 3, \log_{\pi} b = 5.$$

Ответ. 7.

18. [9] Решить уравнение

$$2\log_{12}\left(x + \frac{6}{x-5}\right) = \log_{12}\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3}\right) + 3.$$

Ответ. $x_1 = 6$, $x_2 = 11$.

19. [9] Найти множество значений функции

$$y = \log_{0,2}\left(\frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)}\right).$$

Ответ. $[-1; +\infty)$.

20. [10] При каких значениях a сумма $\log_a(2^x - 1)$ и $\log_a(2^x - 7)$ равна единице ровно при одном значении x ?

Ответ. $0 < a < 1$, $a > 1$.

21. [10] При каких значениях a сумма выражений $\log_a\left(\frac{3 + 2x^2}{1 + x^2}\right)$ и $\log_a\left(\frac{5 + 4x^2}{1 + x^2}\right)$ больше единицы при всех x ?

Ответ. $1 < a \leq 8$.

22. [10] При каких значениях a сумма выражений

$$\log_a(\sqrt{1 - x^2} + 1) \text{ и } \log_a(\sqrt{1 - x^2} + 7)$$

будет меньше единицы при всех допустимых значениях x ?

Ответ. $0 < a < 1$, $a > 16$.

Задания для интересующихся математикой

Примеры с решениями

Выразить $\log_{600} 900$ через a и b , если

$$a = \log_5 2, b = \log_2 3.$$

Решение. Применяя формулу перехода и свойства логарифмов, получаем

$$\begin{aligned}\log_{600} 900 &= \frac{\log_2 900}{\log_2 600} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)}{\log_2 (2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)} = \frac{2 + 2\log_2 3 + 2\log_2 5}{3 + \log_2 3 + 2\log_2 5} = \\ &= \frac{2\left(1 + b + \frac{1}{a}\right)}{3 + b + \frac{2}{a}} = \frac{2(1 + a + ab)}{2 + 3a + ab}.\end{aligned}$$

Ответ. $\frac{2(1 + a + ab)}{2 + 3a + ab}$.

Решить уравнение

$$1 - \log_9(x + 1)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x + 5}{x + 3}. \quad (1)$$

Решение. Переходя к логарифмам по основанию 3, получаем уравнение

$$1 - \log_3 |x + 1| = \log_3 \frac{x + 5}{x + 3}, \quad (2)$$

равносильное уравнению (1). Уравнение

$$\frac{3}{|x + 1|} = \frac{x + 5}{x + 3}, \quad (3)$$

полученное из уравнения (2) в результате потенцирования, является следствием уравнения (2).

При решении уравнения (3) нужно рассмотреть два возможных случая: $x > -1$ и $x < -1$.

Если $x > -1$, то $|x + 1| = x + 1$ и уравнение (3) примет вид

$$\frac{3}{x + 1} = \frac{x + 5}{x + 3}. \quad (4)$$

Умножая обе части уравнения (4) на $(x + 1)(x + 3)$, получим уравнение $3x + 9 = x^2 + 6x + 5$, являющееся следствием уравнения (4) и имеющее корни $x = -4$ (не удовлетворяет условию $x > -1$) и $x = 1$.

Аналогично если $x < -1$, то уравнение (3) преобразуется к виду $x^2 + 9x + 14 = 0$, откуда находим $x = -7$ и $x = -2$ (оба корня меньше чем -1). Проверка показывает, что числа 1, -7 и -2 входят в ОДЗ уравнения (1) и являются его корнями.

Ответ. $x_1 = -7$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Замечание. Многие учащиеся при решении уравнения (1) допускают ошибку, отбросив знак модуля в левой части уравнения (2). Это приводит к потере корней -7 и -2 .

Решить уравнение

$$\lg^2(4 - x) + \lg(4 - x) \cdot \lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\lg^2\left(x + \frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

Решение. Используя тождество

$$a^2 + ab - 2b^2 = (a - b)(a + 2b),$$

заменим уравнение (1) следующим равносильным уравнением:

$$\left(\lg(4 - x) - \lg\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)\left(\lg(4 - x) + 2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$\lg(4 - x) = \lg\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad (3)$$

$$\lg(4 - x) + 2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0. \quad (4)$$

Потенцируя, из (3) и (4) получаем уравнения

$$4 - x = x + \frac{1}{2}, \quad (5)$$

$$(4 - x) \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 = 1. \quad (6)$$

Уравнение (5) имеет корень $x_1 = \frac{7}{4}$, а уравнение (6) приводится к виду $x(4x^2 - 12x - 15) = 0$, откуда $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2} + \sqrt{6}$, $x_4 = \frac{3}{2} - \sqrt{6}$. Корнями исходного уравнения (1) являются те и только те из чисел x_1, x_2, x_3, x_4 , которые входят в ОДЗ уравнения (1), т. е. удовлетворяют условию $-\frac{1}{2} < x < 4$.

Ответ. $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2} + \sqrt{6}$.

Решить уравнение

$$\log_{1-x} (3-x) = \log_{3-x} (1-x). \quad (1)$$

Решение. Область допустимых значений уравнения (1) — множество E точек x таких, что $x < 1$, $x \neq 0$, $x < 3$, $x \neq 2$, откуда находим

$$x < 1, x \neq 0. \quad (2)$$

Применяя формулу $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ и полагая $\log_{1-x} (3-x) = t$, получаем уравнение $t - \frac{1}{t} = 0$, $t^2 = 1$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Следовательно, на множестве E уравнение (1) равносильно совокупности уравнений $\log_{1-x} (3-x) = 1$, $\log_{1-x} (3-x) = -1$. Первое из них не имеет корней, так как $1 - x \neq 3 - x$. Второе уравнение равносильно на множестве E уравнению $1 - x = \frac{1}{3 - x}$ или $x^2 - 4x + 2 = 0$, откуда $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$. Из чисел x_1, x_2 только x_2 удовлетворяет условиям (2) и является корнем уравнения (1).

Ответ. $x = 2 - \sqrt{2}$.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2x+1} (4x^2 - y^2 + 8x - 6y - 4) = 2, \\ \log_{y+2} (y^2 + 6y - x + 14) = 2. \end{cases}$$

Решение. Если выполняются условия

$$x > -\frac{1}{2}, x \neq 0, y > -2, y \neq -1, \quad (1)$$

то исходная система равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 8x - 6y - 4 = 4x^2 + 4x + 1, \\ y^2 + 6y - x + 14 = y^2 + 4y + 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + 6y = 4x - 5, \\ x = 2y + 10, \end{cases}$$

откуда $y^2 - 2y - 35$, $y_1 = -5$, $y_2 = 7$.

Если $y = -5$, то не выполняются условия (1), а если $y = 7$, то $x = 24$. Пара чисел $x = 24$, $y = 1$ удовлетворяет условиям (1), и поэтому (24; 7) — решение исходной системы.

Ответ. (24; 7).

Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2|x|}{|x| - 3} \geq 0.$$

Решение. Пусть $|x| = t$. Тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$0 < \log_8 \frac{t^2 - 2t}{t - 3} \leq 1; \quad 1 < \frac{t^2 - 2t}{t - 3} \leq 8.$$

Последнее неравенство равносильно каждой из следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 24}{t - 3} \leq 0, \\ \frac{t^2 - 3t + 3}{t - 3} > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t > 3, \\ (t - 4)(t - 6) \leq 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $4 \leq t \leq 6$, т. е. $4 \leq |x| \leq 6$.

Ответ. $-6 \leq x \leq -4$, $4 \leq x \leq 6$.

Решить неравенство

$$\left| \log_{x+1} 2 + \log_2 \frac{x+1}{4} \right| + \left| \log_2 (4x+4) + \log_{x+1} 2 \right| < 5.$$

Решение. Пусть $\log_2(x+1) = t$. Тогда неравенство примет вид

$$\left| t + \frac{1}{t} - 2 \right| + \left| t + \frac{1}{t} + 2 \right| < 5.$$

Полагая $t + \frac{1}{t} = u$, получаем неравенство $|u - 2| + |u + 2| < 5$, равносильное неравенству $|u| < \frac{5}{2}$. Тогда $\frac{t^2 + 1}{|t|} < \frac{5}{2}$, т. е. $2|t|^2 - 5|t| + 2 < 0$ или $(|t| - 2)\left(|t| - \frac{1}{2}\right) < 0$, откуда $\frac{1}{2} < |t| < 2$. Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$-2 < \log_2(x+1) < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \log_2(x+1) < 2.$$

Множества решений первого и второго неравенств — интервалы

$$\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \text{ и } (\sqrt{2} - 1; 3).$$

Ответ. $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$, $\sqrt{2} - 1 < x < 3$.

Решить неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$.

Решение. Решениями данного неравенства являются решения систем

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 1, \\ 4x + 7 > 1, \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 3 < 1, \\ 0 < 4x + 7 < 1, \end{cases} \quad (2)$$

и только их решения.

Система (1) равносильна системе $\begin{cases} |x| > 2, \\ x > -\frac{3}{2}, \end{cases}$ откуда $x > 2$.

Система (2) равносильна системе $\begin{cases} \sqrt{3} < |x| < 2, \\ -\frac{7}{4} < x < -\frac{3}{2}, \end{cases}$ откуда сле-

дует, что $-\frac{7}{4} < x < -\sqrt{3}$.

Ответ. $-\frac{7}{4} < x < -\sqrt{3}$, $x > 2$.

З а м е ч а н и е. Решение логарифмических неравенств, содержащих неизвестное в основании, основано на определении логарифма и свойстве монотонности логарифмической функции. Так, неравенство

$$\log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x) \quad (3)$$

выполняется в двух случаях:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < h(x); \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > h(x) > 0. \end{cases} \end{array}$$

Поэтому все решения как системы «а», так и системы «б» являются решениями неравенства (3).

Задания для самостоятельной работы

1. Найти $\log_{275} 720$, если $\log_5 12 = a$, $\log_{12} 11 = b$.

Ответ. $\frac{2a+1}{2+ab}$.

2. Вычислить без помощи таблиц значение выражения А:

1) $A = (\log_6 9)^2 + \frac{\log_6 324}{\log_4 6}$;

2) $A = 5^{\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{2}\right)} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{21} + 10}$.

Ответ. 1) 4; 2) 6.

3. Сравнить числа $\log_3 4$ и $\log_5 6$. Ответ. $\log_3 4 > \log_5 6$.

4. Вычислить $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$. Ответ. 3.

5. Решить уравнение:

1) $x(1 - \lg 5) = \lg(4^x - 12)$; 2) $3 \log_{3x} x = 2 \log_{9x} x^2$;

3) $(1 + \log_5 3) \log_{15} x = \log_5 28 + \log_{0.2}(x - 3)$;

4) $\log_3 3x + \log_3(4x + 1) = \log_{4x^2 + x} 9$;

5) $\lg^2(4 - x) + \lg(4 - x) \lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2 \lg^2\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Отв. 1) $x = 2$; 2) $x_1 = 1, x_2 = 9$; 3) $x = 7$; 4) $x_1 = \frac{1}{12}, x_2 = \frac{3}{4}$; 5) $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{4}, x_3 = \frac{3}{2} + \sqrt{6}$.

6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_y(10y - 9x) = 2 - \frac{1}{\log_x y}, \\ 5 + \frac{\log_3^2 x - 4}{\log_3 y} = 4^{y-x} + \log_9 x^2. \end{cases}$$

Отв. $(3; 3); \left(\frac{1}{8} \log_4 3; \frac{9}{8} \log_4 3\right)$.

7. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_x(6x - 8y) = 2 - \frac{1}{\log_y x}, \\ 2 + \frac{\log_2^2 x - 1}{\log_2 y} = 5^{4y-x} + \log_4 x^2. \end{cases}$$

Отв. $\left(2; \frac{1}{2}\right); \left(\log_5 3; \frac{1}{2} \log_5 3\right)$.

8. Решить неравенство:

1) $4x + \log_2 9 > \log_2(9 \cdot 2^{x+1} - 5)$;

2) $\log_2(x + 1) < 1 - \log_4 x$;

3) $\log_3(1 + x) > (1 - \log_x(1 - x)) \log_3 x$.

Отв. 1) $\log_4 \frac{5}{18} < x < \log_4 \frac{1}{3}, x > \log_4 \frac{5}{3}$; 2) $0 < x < 1$;

3) $0 < x < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Решить неравенство (9—13).

9. 1) $5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0$;

2) $3 \cdot 49^x - 16 \cdot 21^x + 21 \cdot 9^x < 0$.

Отв. 1) $x < \log_{\frac{3}{5}} 3, x > 1$; 2) $1 < x < \log_{\frac{7}{3}} 3$.

10. $\log_4 x - \log_x 4 \leq \frac{3}{2}$. Отв. $0 < x \leq \frac{1}{2}, 1 < x \leq 16$.

11. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27(x+4)} > 5 \sqrt{\log_3(x+4)}$.

Отв. $-3 \leq x < 3^{\frac{19-5\sqrt{13}}{2}} - 4, x > 3^{\frac{19+5\sqrt{13}}{2}} - 4$.

12. $\log_{\frac{1}{1+x^2}}(4x-2) > -1$. Отв. $\frac{1}{2} < x < 1, x > 3$.

13. $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x) < 0$. Отв. $x < \frac{\sqrt{6}-1}{2}, \frac{6}{5} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

§ 21. Радианная мера угла

Справочные сведения

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ}, \quad \alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^{\circ},$$

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ рад}, \quad \alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад}.$$

Угол в α радиан стягивает дуга, длина которой l вычисляется по формуле $l = \alpha R$, где R — радиус окружности.

Примеры с решениями

Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

1) 6° ; 2) 162° .

Решение.

1) Если 180° соответствует π рад, то 6° соответствует x рад, следовательно, $x = \frac{\pi \cdot 6^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{30}$ рад.

2) $180^{\circ} — \pi$ рад, $162^{\circ} — x$ рад,

$$x = \frac{162^{\circ} \cdot \pi}{180^{\circ}} = \frac{9\pi}{10} = 0,9\pi \text{ рад}.$$

Ответ. 1) $\frac{\pi}{30}$; 2) $0,9\pi$.

Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

1) $0,4\pi$; 2) $1,75\pi$; 3) 3 рад (с точностью до $0,01^{\circ}$).

Решение.

1) Если π рад соответствует 180° , то $0,4\pi$ рад соответствует x° , следовательно, $x = \frac{0,4\pi \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 0,4 \cdot 180^{\circ} = 72^{\circ}$.

2) $\pi — 180^{\circ}$, $1,75\pi — x^{\circ}$,

$$x^{\circ} = \frac{1,75\pi \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 1,75 \cdot 180^{\circ} = 315^{\circ}.$$

3) π рад — 180° , 3 рад — x° ,

$$x^{\circ} = \frac{3 \cdot 180^{\circ}}{\pi} \approx 171,97^{\circ}.$$

Ответ. 1) 72° ; 2) 315° ; 3) $171,97^{\circ}$.

Найти длину l дуги окружности, стягивающей угол в 5 рад, если радиус R окружности равен: 1) 3; 2) 1.

Решение.

1) $l = \alpha R$, $l = 5 \cdot 3 = 15$; 2) $l = \alpha R$, $l = 5 \cdot 1 = 5$.

Ответ. 1) 15; 2) 5.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Выразить в радианной мере углы (1—3).

1. [1] 90° ; 60° ; 150° . 2. [1] 210° ; 315° ; 780° .

3. [1] $30^\circ 15'$; $90^\circ 45'$; $36^\circ 18'$.

Выразить в градусной мере углы (4—6).

4. [1] $\frac{\pi}{4}$; $1\frac{1}{4}\pi$; $\frac{3\pi}{2}$. 5. [2] $0,6\pi$; $1,8\pi$; $3,1\pi$. 6. [3] $0,5$; $1,3$; $10,5$.

7. [3] Дана окружность радиуса R . Найти длину дуги окружности, стягивающей угол в α радиан, если $R = 13$ см, $\alpha = 2$.

8. [3] Длина дуги окружности радиуса R равна l . Найти радианную меру угла, стягиваемого данной дугой, если $R = 1$ см, $l = 3$ см.

9. [3] Центральный угол в α радиан стягивается дугой окружности, длина которой равна l . Найти радиус этой окружности, если $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $l = 2$ см.

Вариант II

Выразить в радианной мере углы (1—3).

1. [1] 180° ; 45° ; 120° . 2. [1] 225° ; 420° ; 675° .

3. [1] $40^\circ 36'$; $95^\circ 12'$; $60^\circ 48'$.

Выразить в градусной мере углы (4—6).

4. [1] $\frac{\pi}{3}$; $1\frac{1}{3}\pi$; 4π . 5. [2] $0,4\pi$; $1,7\pi$; $2,5\pi$. 6. [3] $0,7$; $1,5$; $12,3$.

7. [3] Дана окружность радиуса R . Найти длину l дуги окружности, стягивающей угол в α радиан, если $R = 1$ см, $\alpha = 6$.

8. [3] Длина дуги окружности радиуса R равна l . Найти радианную меру угла, стягиваемого данной дугой, если $R = 12$ см, $l = 4$ см.

9. [3] Центральный угол в α радиан стягивается дугой окружности, длина которой равна l . Найти радиус этой окружности, если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $l = 10$ см.

§ 22. Поворот точки вокруг начала координат

Справочные сведения

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка M окружности, получаемая поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан. Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел вида $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число.

Примеры с решениями

Указать четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан, если:

- 1) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 3) $\alpha = -\frac{\pi}{12}$; 4) $\alpha = 1,7$.

Решение.

1) Поскольку $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$, точка P_α расположена во II четверти.

2) В III четверти: $\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$.

3) В IV четверти: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{12} < 0$.

4) Во II четверти: $\frac{\pi}{2} < 1,7 < \pi$.

Ответ. 1) II; 2) III; 3) IV; 4) II.

На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α , если:

- 1) $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. 1) Повернём точку $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке, попадём в точку B ; затем полученную точку повернём 3 раза на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Точка A — искомая (рис. 37).

2) Повернём точку $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ против часовой стрелки, попадём в точку $B(0; -1)$. При каждом следующем повороте на угол 2π (независимо от направления поворота) будем попадать в точку B . Точка B — искомая (рис. 38).

Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан, если:

- 1) $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

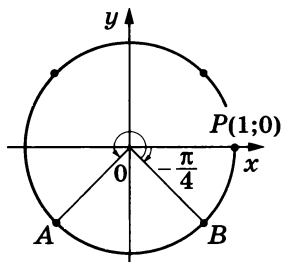


Рис. 37

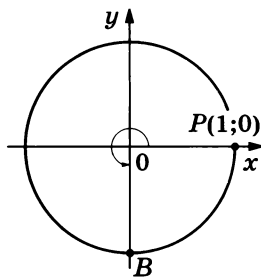


Рис. 38

Решение. 1) Поскольку $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то точка P_α расположена во II четверти $\left(\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \beta < \pi\right)$.

2) Поскольку $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то точка P_α расположена в III четверти $\left(\pi < \frac{3\pi}{2} - \beta < \frac{3\pi}{2}\right)$.

Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α , если:

1) $15\pi < \alpha < \frac{31\pi}{2}$; 2) $-\frac{9\pi}{2} < \alpha < -4\pi$; 3) $1170^\circ < \alpha < 1260^\circ$.

Решение. 1) Представим границы интервалов в виде $2\pi k + \beta$:

1) $15\pi = 14\pi + \pi = 2\pi \cdot 7 + \pi$; $\frac{31\pi}{2} = 14\pi + \frac{3\pi}{2} = 2\pi \cdot 7 + \frac{3\pi}{2}$.

Точка P_α расположена в III четверти.

2) $-\frac{9\pi}{2} = 2\pi \cdot (-2) - \frac{\pi}{2}$; $-4\pi = 2\pi \cdot (-2) + 0$. Точка P_α расположена в IV четверти.

3) $1170^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 90^\circ$, $1260^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 180^\circ$. Точка P_α расположена во II четверти.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Изобразить на единичной окружности точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (1—3).

1. [2] $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. 2. [2] $\alpha = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [4] $\alpha = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Установить, в какой четверти координатной плоскости лежит точка единичной окружности, соответствующая углу α (4—7).

4. [1] $\alpha = -\frac{\pi}{12}$; $\alpha = \frac{6\pi}{7}$; $\alpha = \frac{27\pi}{4}$.

5. [1] $\alpha = 94^\circ$; $\alpha = -100^\circ$; $\alpha = 587^\circ$.

6. [4] $\alpha = 1$; $\alpha = 4,5$; $\alpha = 15$.

7. [4] $\alpha = 0,8 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найти координаты точки P_α , полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (8—9).

8. [4] $\alpha = \frac{9\pi}{2}$; $\alpha = 630^\circ$. 9. [4] $\alpha = -11\pi$; $\alpha = -900^\circ$.

Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (10—12).

10. [5] $8\pi < \alpha < \frac{17\pi}{2}$. 11. [5] $-\frac{11\pi}{2} < \alpha < -5\pi$.

12. [5] $1620^\circ < \alpha < 1710^\circ$.

Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол a радиан (13—14).

13. [2] $a = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 14. [2] $a = \pi + \alpha$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Вариант II

Изобразить на единичной окружности точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (1—3).

1. [2] $\alpha = \frac{\pi}{8}$; $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. 2. [2] $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [4] $\alpha = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Установить, в какой четверти координатной плоскости лежит точка единичной окружности, соответствующая углу α (4—7).

4. [1] $\alpha = \frac{\pi}{5}$; $\alpha = -\frac{3\pi}{8}$; $\alpha = \frac{31\pi}{6}$.

5. [1] $\alpha = -47^\circ$; $\alpha = -182^\circ$; $\alpha = 415^\circ$.

6. [4] $\alpha = 2$; $\alpha = 3,6$; $\alpha = 12$.

7. [4] $\alpha = 1,8 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найти координаты точки P_α , полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (8—9).

8. [4] $\alpha = \frac{11}{2}\pi$; $\alpha = 810^\circ$.

9. [4] $\alpha = -13\pi$; $\alpha = -1080^\circ$.

Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (10—12).

10. [5] $\frac{19\pi}{2} < \alpha < 10\pi$. 11. [5] $-5,5\pi < \alpha < -5\pi$.

12. [5] $1980^\circ < \alpha < 2070^\circ$.

Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол a радиан (13—14).

13. [2] $a = \frac{3\pi}{2} + \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 14. [2] $a = \pi - \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

§ 23. Определение синуса, косинуса и тангенса угла

Справочные сведения

Определения

Синус угла α (обозначается $\sin \alpha$) — ордината точки P_α , полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α (рис. 39).

Косинус угла α (обозначается $\cos \alpha$) — абсцисса точки P_α , полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α (рис. 39).

Тангенс угла α (обозначается $\operatorname{tg} \alpha$) — отношение синуса угла α к его косинусу, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Котангенс угла α (обозначается $\operatorname{ctg} \alpha$) — отношение косинуса угла α к его синусу, т. е. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0, x = \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

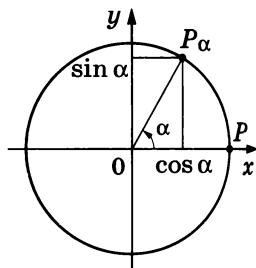


Рис. 39

Примеры с решениями

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α ($0 < \alpha < 2\pi$), если:

- 1) $\sin \alpha = 0,4$; 2) $\cos \alpha = -0,7$.

Решение.

1) Ординаты искомых точек A и B равны $0,4$ (рис. 40).

2) Абсциссы искомых точек C и D равны $-0,7$ (рис. 41).

Найти все углы из промежутка $[-2\pi; 2\pi]$, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку P_α , если:

- 1) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

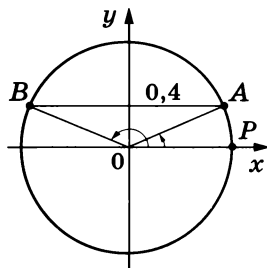


Рис. 40

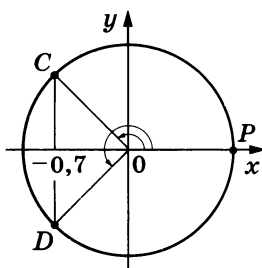


Рис. 41

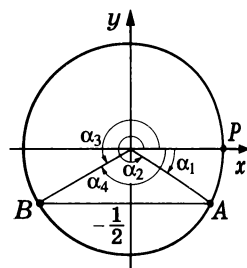


Рис. 42

Решение.

1) Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют (рис. 42) точка A , полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_1 = -\frac{\pi}{6}$ или на угол $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$, а также точка B , полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_3 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ или на угол $\alpha_4 = \alpha_3 - 2\pi = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

2) Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют (рис. 43) точка C , полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ или на угол $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$, а также точка D , полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$ или на угол $\alpha_4 = \alpha_3 + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.

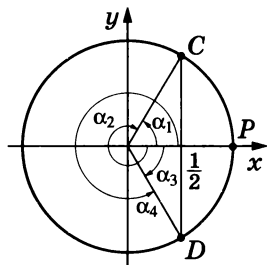


Рис. 43

Найти $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если:

- 1) $\alpha = -5\pi$; 2) $\alpha = \frac{9\pi}{2}$; 3) $\alpha = 2070^\circ$; 4) $\alpha = -1800^\circ$.

Решение.

1) Представив число α в виде $\alpha = 2\pi k + \beta$, где $|\beta| < 2\pi$ и $k \in \mathbb{Z}$, получим $\alpha = 2\pi(-2) - \pi$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол -5π , совпадает с точкой, полученной поворотом на угол $-\pi$, а её координаты равны $(-1; 0)$, значит, $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = -1$.

2) $\alpha = \frac{9\pi}{2} = 2\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$, совпадает с точкой, полученной поворотом на $\frac{\pi}{2}$. Координаты этой точки $(0; 1)$, следовательно, $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$.

3) $\alpha = 360^\circ \cdot 5 + 270^\circ$. Координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на 270° , равны $(0; -1)$, следовательно, $\sin \alpha = -1$, $\cos \alpha = 0$.

4) $\alpha = -1800^\circ = 360^\circ \cdot (-5)$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на -1800° , совпадает с этой точкой, следовательно, $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. [3] Дан прямоугольный треугольник MNK , $\angle N = 90^\circ$. Найти синус, косинус и тангенс углов M и K , если $KN = 6$ см, $KM = 10$ см.

Найти все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку A (2—3).

2. $\boxed{3}$ $A(1; 0)$.

3. $\boxed{4}$ $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (4—6).

4. $\boxed{1}$ $\sin \alpha = 0,25$.

5. $\boxed{1}$ $\cos \alpha = -0,7$.

6. $\boxed{5}$ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Используя калькулятор, найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (7—9).

7. $\boxed{2}$ $\alpha = 36^\circ$.

8. $\boxed{2}$ $\alpha = 2,2\pi$.

9. $\boxed{2}$ $\alpha = 3,1$.

Записать все углы из промежутка $[-2\pi; 2\pi]$, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку P_α (10—12).

10. $\boxed{4}$ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. $\boxed{4}$ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

12. $\boxed{4}$ $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Сравнить числа (13—14).

13. $\boxed{6}$ $\sin 1,3$ и $\sin 1,5$.

14. $\boxed{6}$ $\cos 2$ и $\cos 2,4$.

Найти значение выражения (15—18).

15. $\boxed{4}$ $\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}$.

16. $\boxed{4}$ $\cos(-\pi) - \sin \frac{3\pi}{2}$.

17. $\boxed{4}$ $\sin \frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

18. $\boxed{4}$ $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{4}$.

Вычислить (19—21).

19. $\boxed{3}$ $\operatorname{tg} \pi$.

20. $\boxed{3}$ $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$.

21. $\boxed{3}$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$.

Найти синус, косинус и тангенс числа α (22—24).

22. $\boxed{5}$ $\alpha = 7\pi$.

23. $\boxed{5}$ $\alpha = -\frac{9\pi}{2}$.

24. $\boxed{5}$ $\alpha = 1980^\circ$.

Решить уравнение (25—30).

25. $\boxed{4}$ $3 \sin \alpha = 0$.

26. $\boxed{4}$ $2 \cos \alpha = -2$.

27. $\boxed{4}$ $\sin \alpha - 1 = 0$.

28. $\boxed{5}$ $\cos 3x = 1$.

29. $\boxed{5}$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

30. $\boxed{6}$ $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

31. $\boxed{4}$ Одной из вершин квадрата, вписанного в единичную окружность, является точка с координатами $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Найти координаты остальных вершин квадрата.

Вариант II

1. [3] Дан прямоугольный треугольник MNK , $\angle N = 90^\circ$. Найти синус, косинус и тангенс углов M и K , если $KN = 10$ см, $KM = 26$ см.

Найти все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку A (2—3).

2. [3] $A(-1; 0)$. 3. [4] $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (4—6).

4. [1] $\sin \alpha = -0,3$. 5. [1] $\cos \alpha = 0,45$. 6. [5] $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Используя калькулятор, найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (7—9).

7. [2] $\alpha = -35,5^\circ$. 8. [2] $\alpha = 0,6\pi$. 9. [2] $\alpha = 5$.

Записать все углы из промежутка $[-2\pi; 2\pi]$, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку P_α (10—12).

10. [4] $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 11. [4] $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. 12. [4] $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Сравнить числа (13—14).

13. [6] $\sin(-0,7)$ и $\sin(-0,5)$. 14. [6] $\cos(-2)$ и $\cos(-2,4)$.

Найти значение выражения (15—18).

15. [4] $\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}$. 16. [4] $\sin(-\pi) - \cos \frac{3}{2}\pi$.

17. [4] $\cos \frac{\pi}{6} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. 18. [4] $\cos(-2\pi) - \sin \frac{\pi}{4}$.

Вычислить (19—21).

19. [3] $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}$. 20. [3] $\operatorname{tg} 2\pi$. 21. [3] $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$.

Найти синус, косинус и тангенс числа α (22—24).

22. [5] $\alpha = -7\pi$. 23. [5] $\alpha = \frac{11\pi}{2}$. 24. [5] $\alpha = -1260^\circ$.

Решить уравнение (25—30).

25. [4] $4 \cos \alpha = 0$. 26. [4] $-3 \sin \alpha = 3$.

27. [4] $5 \cos \alpha - 5 = 0$. 28. [5] $\sin 5x = 1$.

29. [5] $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$. 30. [6] $\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

31. [4] Одной из вершин правильного треугольника, вписанного в единичную окружность, является точка с координатами $(0; 1)$. Найти координаты остальных вершин треугольника.

§ 24. Знаки синуса, косинуса и тангенса

Справочные сведения

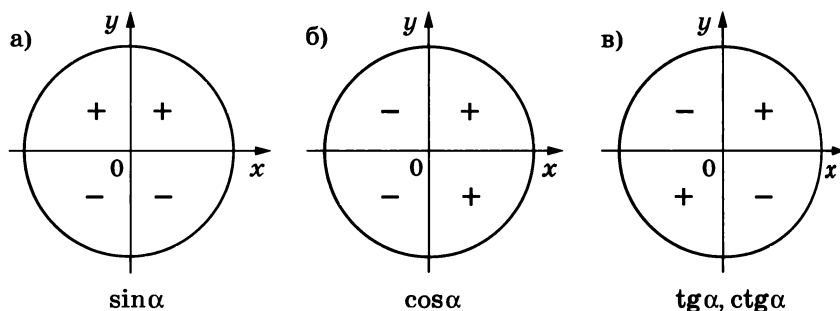


Рис. 44

Примеры с решениями

1. Определить знаки $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{17\pi}{3}$; 2) $\alpha = -307^\circ$.

Решение. 1) $\alpha = \frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$, следовательно, угол α лежит в IV четверти и $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

2) $\alpha = -307^\circ = -360^\circ + 53^\circ$, следовательно, угол α лежит в I четверти и $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

2. Сравнить числа: 1) $\sin 3$ и $\sin 4$; 2) $\cos 4$ и $\cos 5$; 3) $\sin 2$ и $\cos 2$.

Решение. 1) $\sin 3 > 0$, так как число $3 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; $\sin 4 < 0$, так как $4 \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Следовательно, $\sin 3 > \sin 4$.

2) $\cos 4 < 0$, так как $4 \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; $\cos 5 > 0$, так как $5 \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Следовательно, $\cos 4 < \cos 5$.

3) Так как $2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, то $\sin 2 > 0$, а $\cos 2 < 0$. Следовательно, $\sin 2 > \cos 2$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

В какой четверти находится точка А (1—2)?

1. **1** Обе координаты точки А положительные.
2. **1** Абсцисса точки А — число положительное, ордината — отрицательное.

3. [2] В какой четверти может находиться точка A , если частное от деления её абсциссы на ординату есть число положительное?

В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (4—8)?

4. [2] $\alpha = \frac{2\pi}{7}$. 5. [2] $\alpha = \frac{17\pi}{4}$. 6. [2] $\alpha = -\frac{\pi}{9}$.
7. [3] $\alpha = -3,4$. 8. [3] $\alpha = 13,6$.

Точка A получена поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $\alpha - \frac{\pi}{2}$. В какой четверти расположена точка A (9—10)?

9. [4] $\alpha = \frac{7\pi}{8}$. 10. [4] $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

Определить знаки чисел $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ (11—15).

11. [3] $\alpha = \frac{2\pi}{11}$. 12. [3] $\alpha = 2,3$. 13. [3] $\alpha = -2,7$.
14. [3] $\alpha = -\frac{11\pi}{5}$. 15. [3] $\alpha = 398^\circ$.

Определить знаки чисел $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ (16—19).

16. [3] $\alpha = 71,9^\circ$. 17. [4] $\alpha = -\frac{34\pi}{7}$.
18. [3] $\alpha = 3,7$. 19. [3] $\alpha = -\frac{5\pi}{32}$.

В какой четверти может находиться точка, соответствующая числу α (20—21)?

20. [3] $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$. 21. [4] $\frac{35\pi}{2} < \alpha < \frac{37\pi}{2}$.

Сравнить числа (22—26).

22. [4] $\sin \frac{3\pi}{8}$ и $\sin \frac{11\pi}{8}$. 23. [4] $\cos \frac{5\pi}{8}$ и $\cos \left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

24. [5] $\sin 4,1$ и $\sin 3,01$. 25. [5] $\cos(-1)$ и $\cos(-2)$.

26. [5] $\sin 2,5$ и $\cos 2,5$.

27. [7] В какой четверти находится точка единичной окружности, соответствующая числу α , если $\sin \alpha + \cos \alpha = -1,2$?

Решить уравнение (28—29).

28. [6] $\sin(3x + \pi) = 0$. 29. [6] $\cos(3\pi + 2x) = -1$.

Вариант II

В какой четверти находится точка A (1—2)?

1. [1] Обе координаты точки A отрицательны.
2. [1] Абсцисса точки A — число отрицательное, ордината — положительное.

3. [2] В какой четверти может находиться точка A , если частное от деления её абсциссы на ординату есть число отрицательное?

В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (4—8)?

4. [2] $\alpha = \frac{3\pi}{8}$. 5. [2] $\alpha = \frac{19\pi}{6}$. 6. [2] $\alpha = -\frac{3\pi}{11}$.
7. [3] $\alpha = -5,7$. 8. [3] $\alpha = -13,6$.

Точка A получена поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $\alpha - \frac{\pi}{2}$. В какой четверти расположена точка A (9—10)?

9. [4] $\alpha = \frac{4\pi}{5}$. 10. [4] $\alpha = \frac{6\pi}{5}$.

Определить знаки чисел $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ (11—15).

11. [3] $\alpha = 0,35$. 12. [3] $\alpha = \frac{11\pi}{12}$.
13. [3] $\alpha = -\frac{6\pi}{7}$. 14. [3] $\alpha = -0,03$.
15. [3] $\alpha = -405^\circ$.

Определить знаки чисел $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ (16—19).

16. [3] $\alpha = 171,9^\circ$. 17. [4] $\alpha = -\frac{29\pi}{8}$.
18. [3] $\alpha = -4$. 19. [3] $\alpha = \frac{4\pi}{37}$.

В какой четверти может находиться точка, соответствующая числу α (20—21)?

20. [3] $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$. 21. [4] $\frac{33\pi}{2} < \alpha < \frac{35\pi}{2}$.

Сравнить числа (22—26).

22. [4] $\sin \frac{4\pi}{7}$ и $\sin \left(-\frac{4\pi}{7} \right)$. 23. [4] $\cos \frac{13\pi}{9}$ и $\cos \frac{2\pi}{9}$.

24. [5] $\sin 0,37$ и $\sin 6,01$. 25. [5] $\cos(-3)$ и $\cos(-5)$.

26. [5] $\sin 4,5$ и $\cos 4,5$.

27. [7] В какой четверти находится точка единичной окружности, соответствующая числу α , если $\sin \alpha - \cos \alpha = 1,2$?

Решить уравнение (28—29).

28. [6] $\cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$. 29. [6] $\sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2x \right) = 1$.

§ 25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Справочные сведения

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad (2)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (3)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е. Формулы (2) — (4) справедливы для тех значений аргументов, при которых их левые и правые части имеют смысл.

Примеры с решениями

Вычислить $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. С помощью формулы (3) находим

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$. Поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$, а из равенства (1) следует, что $\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Ответ. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Упростить выражение $A = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\cos \alpha + \sin \alpha}$.

Решение. С помощью тождества (1) и формулы $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ получаем

$$A = \frac{2 \sin^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha.$$

Существует ли угол α , такой, что $\sin \alpha = \frac{3}{7}$, $\cos \alpha = \frac{4}{7}$?

Решение. Так как для любого α справедливо равенство (1), а $\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} \neq 1$, то ни при каком α равенства $\sin \alpha = \frac{3}{7}$ и $\cos \alpha = \frac{4}{7}$ не могут выполняться одновременно.

Ответ. Не существует.

Найти $\sin x \cos x$, если $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$.

Решение. Возводя обе части заданного равенства в квадрат, получаем $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9}$, или $1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$, откуда $\sin x \cos x = -\frac{4}{9}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить (1—4).

1. [3] $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
2. [3] $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
3. [5] $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$, $6\pi < \alpha < \frac{13\pi}{2}$.
4. [5] $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$, $5\pi < \alpha < \frac{11\pi}{2}$.

Выяснить, существует ли угол α , для которого выполнены заданные условия (5—6).

5. [2] $\sin \alpha = \frac{3}{8}$, $\cos \alpha = \frac{5}{8}$.
6. [3] $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
7. [5] Зная, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, найти $\sin \alpha \cos \alpha$.
8. [6] Зная, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, найти $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.
9. [8] Вычислить $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2$.

Упростить выражение (10—15).

10. [2] $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
11. [3] $\cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.
12. [3] $\frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.
13. [4] $\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}$.
14. [5] $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1}$.
15. [6] $\frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{(1 - \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha$.
16. [6] Найти значение выражения $\frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8}$.

Решить уравнение (17—18).

17. [6] $\sin^2 x - 2 = \sin 2x - \cos^2 x$.
18. [6] $3 - \cos 3x = 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x$.

Вариант II

Вычислить (1—4).

1. [3] $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
2. [3] $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
3. [5] $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $8\pi < \alpha < \frac{17\pi}{2}$.
4. [5] $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $3\pi < \alpha < \frac{7\pi}{2}$.

Выяснить, существует ли угол α , для которого выполнены заданные условия (5—6).

5. [2] $\sin \alpha = \frac{1}{9}$, $\cos \alpha = \frac{8}{9}$.
6. [3] $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$.
7. [5] Зная, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, найти $2 \sin \alpha \cos \alpha$.
8. [6] Зная, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$, найти $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.
9. [8] Вычислить $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Упростить выражение (10—15).

10. [2] $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha$.
11. [3] $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha$.
12. [3] $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.
13. [4] $\frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.
14. [5] $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 1}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}$.
15. [6] $\operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{(1 + \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \cos \alpha}$.
16. [6] Найти значение выражения $\frac{3 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}{6 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{5}$.

Решить уравнение (17—18).

17. [6] $2 \cos^2 x - 1 = \cos 3x - 2 \sin^2 x$.
18. [6] $1 + \sin 2x - 2 \cos^2 2x = 2 \sin^2 2x$.

§ 26. Тригонометрические тождества

Справочные сведения

Равенство, справедливое для всех допустимых значений входящих в него букв, называют тождеством.

Способы доказательства тождеств:

- преобразование левой части к виду правой;
- преобразование правой части к виду левой;

— установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю;

— преобразование левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Примеры с решениями

Доказать тождество $1 - \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

Решение. Докажем тождество разными способами.

I способ. Преобразуем левую и правую части так, чтобы получилось одно и то же выражение:

$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ (на основании тождества (1) § 25).

$$\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha.$$

II способ. Покажем, что разность между левой и правой частями равна 0 (применив формулу (4) § 25 и основное тригонометрическое тождество):

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \alpha - \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} &= 1 - \cos^2 \alpha - \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \\ &= 1 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Данное тождество верно при всех значениях $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. при условии, что $\sin \alpha \neq 0$.

Доказать тождество $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Решение.

I способ. Преобразуем левую часть так, чтобы получилось выражение, стоящее в правой части. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sin \alpha$ ($\sin \alpha \neq 0$, $1 + \cos \alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ — допустимые значения).

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{\sin \alpha \cdot \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \\ &= \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

II способ. Найдём разность левой и правой частей:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \\ &= \frac{0}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Найти значение выражения

$$\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha, \text{ если } \cos \alpha + \sin \alpha = 0,4.$$

Решение. Воспользуемся формулой разложения на множители суммы кубов и основным тригонометрическим тождеством.

$$\begin{aligned}\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha &= (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha) = \\ &= (\cos \alpha + \sin \alpha)(1 - \cos \alpha \sin \alpha) = 0,4(1 - \cos \alpha \sin \alpha).\end{aligned}$$

Чтобы найти значение выражения $\cos \alpha \sin \alpha$, найдём квадрат двучлена $\cos \alpha + \sin \alpha$.

$$\begin{aligned}(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 &= \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha, \\ 0,16 &= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = -0,84, \\ \sin \alpha \cos \alpha &= -0,42.\end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha = 0,4(1 + 0,42) = 0,568.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Доказать тождество (1—7).

1. [2] $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$.

2. [2] $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

3. [3] $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$.

4. [3] $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$. 5. [3] $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$.

6. [5] $\frac{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$.

7. [6] $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \operatorname{tg} \alpha$ для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Найти значение выражения (8—10).

8. [6] $\sin \alpha + \cos \alpha$, если $\sin \alpha \cos \alpha = 0,2$.

9. [7] $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,7$.

10. [7] $\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha$, если $\cos \alpha \sin \alpha = 0,4$.

Решить уравнение (11—12).

11. [6] $2 \sin^2 2x - 1 = \cos 2x(1 - 2 \cos 2x)$.

12. [6] $1 - 3 \sin^2 3x = \sin 3x - 3(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)$.

Вариант II

Доказать тождество (1—7).

1. [2] $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.

2. [2] $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

3. [3] $\frac{1}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$.

$$4. \boxed{3} \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$5. \boxed{3} \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$6. \boxed{5} \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1.$$

$$7. \boxed{6} \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = -2 \operatorname{tg} \alpha \text{ для } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Найти значение выражения (8—10).

$$8. \boxed{6} \sin \alpha \cos \alpha, \text{ если } \sin \alpha - \cos \alpha = 0,3.$$

$$9. \boxed{7} \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha, \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = 0,8.$$

$$10. \boxed{7} \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha, \text{ если } \cos \alpha - \sin \alpha = 0,1.$$

Решить уравнение (11—12).

$$11. \boxed{6} 2 \cos^2 2x - 3 = \sin 2x (1 - 2 \sin 2x).$$

$$12. \boxed{6} (\sin 3x - 1)(\sin 3x + 1) = \sin 3x - \cos^2 3x.$$

§ 27. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

Справочные сведения

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Примеры с решениями

Вычислить: 1) $\sin(-60^\circ) + \cos(-45^\circ) - \operatorname{tg}(-180^\circ)$;

$$2) \frac{1}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad 3) \sin(-765^\circ); \quad 4) \cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right).$$

Решение. 1) Применяя вышеприведённые формулы, получаем

$$\begin{aligned} \sin(-60^\circ) + \cos(-45^\circ) - \operatorname{tg}(-180^\circ) &= -\sin 60^\circ + \cos 45^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{1}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} &= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \sin(-765^\circ) &= -\sin 765^\circ = -\sin(360^\circ \cdot 2 + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$4) \cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right) = \cos \frac{19\pi}{3} = \cos\left(2\pi \cdot 3 + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

2. Упростить выражение

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2(-\alpha) - \sin(-\alpha) \cos(-\alpha)} - \operatorname{tg}(-\alpha).$$

Решение. Преобразуем выражение, применяя вышеуказанные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha &= \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} + \\ + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Точка $M_1(x_1; y_1)$ симметрична точке $M(x; y)$ относительно оси ординат, а точка $M_2(x_2; y_2)$ симметрична точке $M(x; y)$ относительно начала координат. Найти координаты точек M_1 и M_2 (1–2).

1. [2] $x = 0,6, y = 0,8.$

2. [2] $x = a, y = -b \ (a > 0, b > 0).$

Сравнить числа (3–5).

3. [2] $\sin \frac{\pi}{5}$ и $\sin \left(-\frac{\pi}{5} \right).$

4. [2] $\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right)$ и $\cos \frac{\pi}{12}.$

5. [2] $\operatorname{tg}(-4)$ и $\operatorname{tg} 4.$

Вычислить (6–9).

6. [3] $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right).$

7. [3] $\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) - \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6} \right).$

8. [3] $\sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + \cos(-11\pi).$

9. [4] $\operatorname{tg}(-780^\circ) - \operatorname{ctg}(-390^\circ).$

Упростить выражение (10–12).

10. [4] $\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha) + \sin(-\alpha)} + \frac{\cos(-\alpha)}{\cos(-\alpha) - \sin \alpha}.$

11. [5] $\frac{\cos \alpha - \sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} + \operatorname{tg}(-\alpha).$ 12. [6] $\frac{\operatorname{tg}^2(-\alpha) + \sin(-\alpha)}{\operatorname{tg}(-\alpha)} - \operatorname{tg}(-\alpha).$

Решить уравнение (13–15).

13. [6] $2 \cos^2(-3x) - 3 = \sin(-3x) - 2 \sin^2(-3x).$

14. [7] $(\cos(-2x) + 1)(\sin(-x) + 1) = 0.$

15. [7] $(1 + \sin(-x))(3 - 2 \cos(-x)) = 0.$

Вариант II

Точка $M_1(x_1; y_1)$ симметрична точке $M(x; y)$ относительно оси ординат, а точка $M_2(x_2; y_2)$ симметрична точке $M(x; y)$ относительно начала координат. Найти координаты точек M_1 и M_2 (1—2).

1. [2] $x = \frac{5}{13}, y = \frac{12}{13}$. 2. [2] $x = -a, y = b$ ($a > 0, b > 0$).

Сравнить числа (3—5).

3. [2] $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\sin\frac{\pi}{8}$. 4. [2] $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ и $-\cos\frac{\pi}{10}$.

5. [2] $\operatorname{tg}(-4)$ и $-\operatorname{tg} 4$.

Вычислить (6—9).

6. [3] $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

7. [3] $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

8. [3] $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \sin(-7\pi)$. 9. [4] $\operatorname{ctg}(-1125^\circ) - \operatorname{tg}(-405^\circ)$.

Упростить выражение (10—12).

10. [4] $\frac{\cos(-\alpha)}{\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)} - \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha) + \sin\alpha}$.

11. [5] $\operatorname{ctg}(-\alpha) + 1 - \frac{\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}$.

12. [6] $\frac{\operatorname{ctg}^2(-\alpha) - \cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(-\alpha)} - \operatorname{ctg}(-\alpha)$.

Решить уравнение (13—15).

13. [6] $\cos(-2x) - 3\sin^2(-2x) = 3\cos^2(-2x) - 2$.

14. [7] $(\sin(-2x) - 1)\cos(-2x) = 0$.

15. [7] $(\cos(-x) - 1)(3\sin(-x) - 4) = 0$.

§ 28. Формулы сложения

Справочные сведения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta, \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Формулы (5) и (6) справедливы для тех значений аргумента, при которых их левые и правые части имеют смысл.

Примеры с решениями

Вычислить $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)$, если $\operatorname{tg} \alpha = -3$.

Решение. По формуле (5) $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} \alpha}$. Так как $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -3$, то $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{3} - 3}{1 + 3\sqrt{3}}$.

Освободимся от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{\sqrt{3} - 3}{1 + 3\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 3)(1 - 3\sqrt{3})}{(1 + 3\sqrt{3})(1 - 3\sqrt{3})} = \frac{10\sqrt{3} - 12}{-26} = \frac{6 - 5\sqrt{3}}{13}.$$

Доказать тождество

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

Решение. Сложим почленно равенства (1) и (2).

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta, \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)). \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить без помощи таблиц и микрокалькулятора (1—5).

1. [1] $\sin 42^\circ 30' \cos 47^\circ 30' + \sin 47^\circ 30' \cos 42^\circ 30'$.

2. [1] $\cos 27^\circ \cos 18^\circ - \sin 27^\circ \sin 18^\circ$.

3. [2] $\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{15} - \cos \frac{2\pi}{5} \sin \frac{\pi}{15}$.

4. [2] $\cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} + \sin \frac{4\pi}{9} \sin \frac{5\pi}{18}$.

5. [2] $\frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$.

Вычислить, представив аргумент в виде суммы или разности (6—8).

6. [3] $\sin 75^\circ$.

7. [3] $\cos 135^\circ$.

8. [3] $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Вычислить (9—12).

9. [3] $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\sin \beta = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.
10. [5] $\cos(60^\circ + \alpha)$, если $\sin \alpha = 0,6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
11. [5] $\cos(55^\circ + \alpha)$, если $\sin(10^\circ + \alpha) = 0,6$ и $0^\circ < \alpha < 30^\circ$.
12. [7] $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Упростить выражение (13—17).

13. [3] $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta$.
14. [3] $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.
15. [5] $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\cos(\alpha - \beta)} \cdot \sin \alpha \sin \beta$.
16. [3] $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.
17. [4] $\frac{2 \cos \alpha \sin \beta + \sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)}$.
18. [6] Разложить на множители
 $\sin^2 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 3\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$.

Доказать тождество (19—20).

19. [6] $\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.
20. [7] $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = -\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$.

Решить уравнение (21—23).

21. [6] $\sin 3x \cos 2x = \cos 3x \sin 2x + 1$.
22. [6] $\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \frac{3}{2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
23. [7] $\sin 5x \cos 3x \sin x = \cos 5x \sin 3x \sin x$.

Вариант II

Вычислить без помощи таблиц и микрокалькулятора (1—5).

1. [1] $\sin 103^\circ 30' \cos 13^\circ 30' - \sin 13^\circ 30' \cos 103^\circ 30'$.
2. [1] $\cos 53^\circ \cos 8^\circ + \sin 53^\circ \sin 8^\circ$.
3. [2] $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6}$.
4. [2] $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{8\pi}{9}$.
5. [2] $\frac{\operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}{1 + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}$.

Вычислить, представив аргумент в виде суммы или разности (6—8).

6. [3] $\cos 15^\circ$. 7. [3] $\sin 135^\circ$. 8. [3] $\operatorname{tg} 105^\circ$.

Вычислить (9—12).

9. [3] $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

10. [5] $\sin(30^\circ + \alpha)$, если $\cos \alpha = -0,6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

11. [5] $\cos(\alpha - 65^\circ)$, если $\sin(\alpha - 20^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

12. [7] $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin \alpha = -\frac{40}{41}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Упростить выражение (13—17).

13. [3] $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} - 1$.

14. [3] $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$.

15. [5] $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{\cos(\alpha + \beta)} \cdot \cos \alpha \sin \beta$.

16. [3] $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

17. [4] $\frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$.

18. [6] Разложить на множители

$$\cos 5\alpha \cos 3\alpha \sin 3\alpha + \cos 5\alpha \sin 2\alpha + \sin 5\alpha \sin^2 3\alpha - \sin 5\alpha \cos 2\alpha.$$

Доказать тождество (19—20).

19. [6] $\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

20. [7]
$$\frac{\cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = -\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Решить уравнение (21—23).

21. [6] $1 - \cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x$.

22. [6] $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2} \sin x = -\sqrt{2}$.

23. [7] $\cos 5x \cos 3x \cos x = -\sin 5x \sin 3x \cos x$.

§ 29. Синус, косинус и тангенс двойного угла

Справочные сведения

Формулы двойного и тройного угла.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (3)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad (4)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е. Формула (3) справедлива для тех значений α , при которых её правая и левая части имеют смысл.

Примеры с решениями

Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $5\pi < \alpha < \frac{11\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$.

Р е ш е н и е. Применяя формулу (3) из § 25, находим

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{16}{25},$$

отсюда $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, так как $5\pi < \alpha < \frac{11\pi}{2}$, т. е. α лежит в III четверти.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}, \quad \sin \alpha = -\frac{3}{5}.$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{3}{5} \right) \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) = \frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

Упростить выражение

$$S = \frac{\sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha} - \frac{2(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos 2\alpha}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем S , применяя формулы (1) и (2):

$$S = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha} - \frac{2(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$$

Разделим числитель и знаменатель второй дроби на выражение $\sin \alpha - \cos \alpha$, а затем приведём дроби к общему знаменателю. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

О т в е т. $S = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$

Найти значение выражения

$$S = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha, \text{ если } \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ и } -\frac{15\pi}{4} < \alpha < -\frac{13\pi}{4}.$$

Р е ш е н и е. Разложим S на множители, получим

$$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\cos 2\alpha.$$

Здесь использована формула (2) и основное тригонометрическое тождество. По условию $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, следовательно, $\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{13}}{4}$. Так как по условию $-\frac{15\pi}{4} < \alpha < -\frac{13\pi}{4}$, то $\frac{13\pi}{2} < -2\alpha < \frac{15\pi}{2}$, т. е. угол -2α лежит во второй или в третьей четверти, и поэтому $\cos 2\alpha = \cos(-2\alpha) = -\frac{\sqrt{13}}{4}$. Следовательно, $S = -\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Выразить с помощью формулы двойного угла (1—9).

1. [1] $\sin 52^\circ$.
2. [1] $\cos \frac{4\pi}{5}$.
3. [1] $\operatorname{tg} 64^\circ$.
4. [2] $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.
5. [2] $\cos(\pi - \alpha)$.
6. [2] $\sin 6\alpha$.
7. [2] $\cos 7\alpha$.
8. [2] $\operatorname{tg} 4\alpha$.
9. [3] $\sin \alpha \cos \alpha$.

Вычислить без помощи таблиц и микрокалькулятора (10—12).

10. [2] $2 \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$.
11. [2] $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$.
12. [2] $(\cos 22,5^\circ - \sin 22,5^\circ)^2$.
13. [3] Найти $\sin 2\alpha$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.
14. [4] Найти $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$.
15. [5] Найти $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \sqrt{2} - 1$.

Упростить выражение (16—18).

16. [3] $\cos^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
17. [4] $\frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$.
18. [4] $\sin 2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$.

19. [6] Доказать тождество

$$\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \cos 4\alpha.$$

20. [7] Вывести формулу (4), а затем вычислить $\sin 3\alpha$, если $\cos \alpha = -0,6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

21. [6] Вычислить $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$.

Вычислить без помощи таблиц и микрокалькулятора (22—23).

22. [8] $\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$.
23. [9] $\sin 3\alpha + \cos 3\alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решить уравнение (24—25).

24. [7] $\cos^4 5x - \sin^4 5x = 0$.

25. [7] $8 \sin 2x \cos 2x = 4$.

Вариант II

Выразить с помощью формулы двойного угла (1—9).

1. [1] $\cos 58^\circ$.

2. [1] $\sin \frac{6\pi}{7}$.

3. [1] $\operatorname{tg} 78^\circ$.

4. [2] $\sin(\pi - \alpha)$.

5. [2] $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

6. [2] $\cos 6\alpha$.

7. [2] $\sin 9\alpha$.

8. [2] $\operatorname{tg} 8\alpha$.

9. [3] $3 \sin \alpha \cos \alpha$.

Вычислить без помощи таблиц и микрокалькулятора (10—12).

10. [2] $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$.

11. [2] $\cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{3\pi}{8}$.

12. [2] $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$.

13. [3] Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

14. [4] Найти $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$.

15. [5] Найти $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 2 - \sqrt{3}$.

Упростить выражение (16—18).

16. [3] $\cos^2 6\alpha + 4 \sin^2 3\alpha \cos^2 3\alpha$.

17. [4] $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$.

18. [4] $\cos 2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 1$.

19. [6] Доказать тождество $\frac{1}{8} - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{1}{8} \cos 4\alpha$.

20. [7] Вывести формулу (5), а затем вычислить $\cos 3\alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

21. [6] Вычислить $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$.

Вычислить без помощи таблиц и микрокалькулятора (22—23).

22. [8] $\sin^5 \alpha - \cos^5 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$.

23. [9] $\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Решить уравнение (24—25).

24. [7] $\sin^4 2x - \cos^4 2x = 0$.

25. [7] $6 \sin 3x \cos 3x = -3$.

§ 30. Синус, косинус и тангенс половинного угла

Справочные сведения

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad (1) \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad (3) \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (5) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Формулы (3) — (6) справедливы для тех значений аргументов, при которых их левые и правые части имеют смысл.

Примеры с решениями

Вычислить $\operatorname{tg} 15^\circ$ без помощи таблиц и микрокалькулятора.

Решение. Так как $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{30^\circ}{2} \right)$, то при вычислении применим формулу (3):

$$\operatorname{tg}^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = (2 - \sqrt{3})^2.$$
$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

О т в е т. $2 - \sqrt{3}$.

Выразить сумму $S = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ через $\cos 4\alpha$.

Решение. Используя формулу

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

и основное тригонометрическое тождество, получаем

$$S = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha.$$

Так как $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$, то $S = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Применив формулу (1) из § 29 и формулу (2), находим

$$S = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4\alpha).$$

О т в е т. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4\alpha)$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Выполнить понижение степени (1—8).

1. ☐ $\sin^2 30^\circ$. 2. ☐ $\cos^2 27^\circ$. 3. ☐ $\operatorname{tg}^2 75^\circ$.
4. ☐ $\sin^2 \beta$. 5. ☐ $\cos^2 \frac{x}{4}$. 6. ☐ $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}$.
7. ☐ $\cos^2 3\alpha$. 8. ☐ $\sin^2 \frac{\pi}{14}$.

Вычислить (9—10).

9. ☐ $\cos \frac{\pi}{12}$. 10. ☐ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

Найти числовое значение выражения (11—12).

11. ☐ $1 - \cos 3\alpha$, если $\sin \frac{3\alpha}{2} = 0,7$.
12. ☐ $1 + \cos 4\alpha$, если $\sin \alpha = 0,2$.
13. ☐ Найти значение $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = b$.
14. ☐ Найти значение $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos 2\alpha = a$, $a \neq -1$.

Упростить выражение (15—16).

15. ☐ $\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} - \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$. 16. ☐ $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

17. ☐ Доказать тождество $\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$.

18. ☐ Вычислить $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,2$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

19. ☐ Вычислить без помощи таблиц и микрокалькулятора $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$.

20. ☐ Выразить сумму $S = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ через $\cos 2\alpha$.

Решить уравнение (21—22).

21. ☐ $1 - 2 \sin^2 2x = 0$. 22. ☐ $1 - \cos 3x = 2 \sin \frac{3x}{2}$.

Вариант II

Выполнить понижение степени (1—8).

1. ☐ $\sin^2 45^\circ$. 2. ☐ $\cos^2 54^\circ$. 3. ☐ $\operatorname{tg}^2 82^\circ$.
4. ☐ $\cos^2 \beta$. 5. ☐ $\sin^2 \frac{x}{2}$. 6. ☐ $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{6}$.
7. ☐ $\sin^2 4\alpha$. 8. ☐ $\cos^2 \frac{\pi}{16}$.

Вычислить (9—10).

9. $\boxed{6} \sin \frac{\pi}{8}$. 10. $\boxed{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$.

Найти числовое значение выражения (11—12).

11. $\boxed{5} 1 + \cos 5\alpha$, если $\cos \frac{5\alpha}{2} = 0,3$.

12. $\boxed{7} 1 - \cos 4\alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$.

13. $\boxed{6}$ Найти значение $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = a$.

14. $\boxed{6}$ Найти значение $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos 2\alpha = b$, $b \neq -1$.

Упростить выражение (15—16).

15. $\boxed{4} \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} + \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$.

16. $\boxed{6} \frac{(1 - \cos 4\alpha) \cos^2 2\alpha}{1 - \cos^2 2\alpha} + \frac{(1 + \cos 4\alpha) \sin^2 2\alpha}{1 - \sin^2 2\alpha}$.

17. $\boxed{6}$ Доказать тождество $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

18. $\boxed{8}$ Вычислить $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,2$, $\pi < \alpha < 2\pi$.

19. $\boxed{7}$ Вычислить без помощи таблиц и микрокалькулятора $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$.

20. $\boxed{7}$ Выразить разность $R = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ через $\cos 4\alpha$.

Решить уравнение (21—22).

21. $\boxed{6} 2 \cos^2 3x - 1 = 0$.

22. $\boxed{7} 1 + \cos 5x = 2 \cos \frac{5}{2} x$.

§ 31. Формулы приведения

Справочные сведения

Формулы приведения:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha,$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha,$$

$$\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\sin (\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha.$$

Любую из формул приведения можно получить, пользуясь правилом:

а) в правой части формулы ставится такой же знак, какой имеет левая часть, если считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, а косинус — на синус; если же угол равен $\pi \pm \alpha$, то функция не меняет своего названия.

Для любого целого n ($n \in \mathbb{Z}$) справедливы равенства:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Примеры с решениями

Вычислить: 1) $\sin 735^\circ$; 2) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$.

Решение. 1) Применяя формулу (1) и формулу (2) из § 28, получаем $\sin 735^\circ = \sin(360^\circ \cdot 2 + 15^\circ) = \sin 15^\circ$, $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

2) Полагая в равенстве (5) из § 28 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\beta = \frac{\pi}{6}$ и учитывая, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, получаем

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}.$$

Определить знак числового выражения

$$A = \frac{\sin 200^\circ \cdot \sin 800^\circ \cdot \cos 400^\circ}{\operatorname{tg} 1060^\circ}.$$

Решение. Применяя формулы (1) — (3) и вышеприведённое правило, получаем

$$\sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ < 0;$$

$$\sin 800^\circ = \sin(720^\circ + 80^\circ) = \sin(2 \cdot 360^\circ + 80^\circ) = \sin 80^\circ > 0;$$

$$\cos 400^\circ = \cos(360^\circ + 40^\circ) = \cos 40^\circ > 0;$$

$$\operatorname{tg} 1060^\circ = \operatorname{tg}(5 \cdot 180^\circ + 160^\circ) = \operatorname{tg} 160^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 20^\circ) = -\operatorname{tg} 20^\circ < 0.$$

Таким образом, числитель и знаменатель — числа отрицательные; следовательно, дробь принимает положительное значение.

Ответ. $A > 0$.

Доказать тождество:

$$1) \sin 3\alpha \sin(\pi - \alpha) + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cos 3\alpha = \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) - \sin^2(\pi - \alpha);$$

$$2) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 0.$$

Решение.

1) Применяя формулы приведения, сложения и двойного аргумента, получаем в левой части

$$\sin 3\alpha \sin \alpha + \cos \alpha \cos 3\alpha = \cos(3\alpha - \alpha) = \cos 2\alpha.$$

Правая часть равна

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2(\pi - \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

Левая часть равна правой при всех действительных значениях α . Тожество доказано.

2) Представим $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ с помощью формулы приведения

$$\text{в виде } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

$$\text{Следовательно, } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить с помощью формул приведения (1—2).

1. [2] $\cos 315^\circ + \sin 210^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ$.

2. [3] $\sin \frac{13\pi}{6} - \cos \frac{11\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{4}$.

3. [4] Определить знак числового выражения

$$\frac{\sin 100^\circ \cos 200^\circ \operatorname{tg} 300^\circ}{\sin 1}.$$

Сравнить числа (4—6).

4. [2] $\sin 500^\circ$ и $\cos 600^\circ$. 5. [3] $\sin 5,3\pi$ и $\cos 4,3\pi$.

6. [4] $\sin 12$ и $\cos 13$.

Упростить выражение и найти его числовое значение (7—8).

7. [6]
$$\frac{\sin(\alpha - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} \quad \text{при } \alpha = \frac{5\pi}{4}.$$

8. [6]
$$\frac{\sin\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(7\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\alpha - \pi)} \quad \text{при } \alpha = \frac{5\pi}{6}.$$

Доказать тождество (9—11).

9. [5] $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -1.$

10. [6] $\frac{\sin(\beta - \pi) \sin(2\pi - \beta) \cos(\beta - 2\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{ctg}(\pi - \beta) \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} = \sin^2 \beta.$

11. [7] $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - \alpha\right).$

Вариант II

Вычислить с помощью формул приведения (1—2).

1. [2] $\sin 225^\circ + \cos 330^\circ + \operatorname{ctg} 510^\circ.$

2. [3] $\sin \frac{17\pi}{6} + \cos \frac{14\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}.$

3. [4] Определить знак числового выражения

$$\frac{\sin 300^\circ \operatorname{tg} 200^\circ \cos 100^\circ}{\cos 2}.$$

Сравнить числа (4—6).

4. [2] $\cos 580^\circ$ и $\sin 460^\circ.$ 5. [3] $\sin 5,8\pi$ и $\cos 6,1\pi.$

6. [4] $\sin 13$ и $\cos 9.$

Упростить выражение и найти его числовое значение (7—8).

7. [6] $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)(1 + \operatorname{tg}^2(\alpha - \pi))$ при $\alpha = \frac{2\pi}{3}.$

8. [6] $\frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \operatorname{tg}(4\pi - \beta)}{1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg} \beta}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{12}.$

Доказать тождество (9—11).

9. [5] $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}\left(\beta + \frac{3\pi}{2}\right) = -1.$

10. [6] $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = -\sin \alpha.$

11. [7] $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{4} - \alpha\right) = 0.$

§ 32. Сумма и разность синусов.

Сумма и разность косинусов

Справочные сведения

Формулы суммы и разности синусов:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (1)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (2)$$

Формулы суммы и разности косинусов:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (3)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (4)$$

Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму (разность):

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}, \quad (5)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}, \quad (6)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}. \quad (7)$$

Примеры с решениями

Вычислить $\cos 165^\circ - \cos 75^\circ$.

Решение. По формуле (4) находим

$$\begin{aligned} \cos 165^\circ - \cos 75^\circ &= -2 \sin \frac{165^\circ + 75^\circ}{2} \cdot \sin \frac{165^\circ - 75^\circ}{2} = \\ &= -2 \sin 120^\circ \sin 45^\circ, \end{aligned}$$

где $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

$$\cos 165^\circ - \cos 75^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Преобразовать в произведение сумму $\sin \alpha + \cos \beta$.

Решение. Применяя тождество $\cos \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ и формулу (1), получаем

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos \beta &= \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \beta}{2} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Доказать тождество

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Решение. Применяя формулы (2) и (3), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos \alpha} &= \frac{\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 3\alpha}{\cos 2\alpha + 2\cos 3\alpha \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha (1 + 2\cos 3\alpha)}{\cos 2\alpha (1 + 2\cos 3\alpha)} = \operatorname{tg} 2\alpha.\end{aligned}$$

Преобразовать в произведение сумму

$$S = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 (\alpha + \beta).$$

Решение. Используя равенство $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ и формулу (3), получаем

$$\begin{aligned}S &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} - \sin^2 (\alpha + \beta) = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + 1 - \\ &\quad - \sin^2 (\alpha + \beta) = \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + \cos^2 (\alpha + \beta) = \\ &= \cos (\alpha + \beta) (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)) = 2\cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Доказать тождество $\sin 3\alpha = 4\sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$.

Решение. Преобразуем правую часть тождества с помощью формул (7) и (5):

$$\begin{aligned}4\sin \alpha \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha - \frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha + \frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{2} \right) &= \\ &= 2\sin \alpha \left(\cos 2\alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = 2\sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha = \\ &= \sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin \alpha = \sin 3\alpha.\end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Преобразовать в произведение (1—10).

1. [1] $\sin 18^\circ + \sin 20^\circ$.

2. [1] $\sin 80^\circ - \sin 10^\circ$.

3. [1] $\cos 8^\circ + \cos 4^\circ$.

4. [1] $\cos 40^\circ - \cos 20^\circ$.

5. [2] $\sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{4}$.

6. [2] $\cos \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{3\pi}{4}$.

7. [2] $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sin \alpha$.

8. [2] $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5} \right) - \cos \frac{\pi}{5}$.

9. [2] $\cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}$.

10. [2] $\sin 20^\circ - \cos 40^\circ$.

Упростить выражение (11—12).

11. [2] $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

12. [3] $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$.

Преобразовать в произведение (13—22).

13. [3] $\frac{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 65^\circ + \cos 65^\circ}$.

14. [5] $\sin 10^\circ + 2 \sin 5^\circ \cos 15^\circ + \cos 50^\circ$.

15. [2] $\cos \alpha + \cos 3\alpha$. 16. [2] $\sin \alpha + \cos \alpha$.

17. [5] $1 - \sqrt{2} \cos \alpha$. 18. [5] $\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3}$.

19. [4] $1 + 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$.

20. [6] $\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha$.

21. [7] $\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha$.

22. [8] $\sin 3\alpha \cos 4\alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha$.

Доказать тождество (23—26).

23. [4] $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha$.

24. [6] $\frac{\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta)}{4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$.

25. [4] $\frac{\cos 3\alpha + \cos 2\alpha + \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = 2 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

26. [4] $\frac{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha$.

Вычислить без помощи таблиц (27—28).

27. [8] $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$.

28. [8] $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

Преобразовать в сумму (29—30).

29. [9] $4 \sin \alpha \cos 3\alpha \cos 4\alpha$. 30. [9] $4 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}$.

Вариант II

Преобразовать в произведение (1—10).

1. [1] $\sin 10^\circ + \sin 12^\circ$. 2. [1] $\sin 160^\circ - \sin 40^\circ$.

3. [1] $\cos 6^\circ + \cos 18^\circ$. 4. [1] $\cos 80^\circ - \cos 20^\circ$.

5. [2] $\sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{8}$. 6. [2] $\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6}$.

$$7. \quad [2] \sin \alpha - \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right). \quad 8. \quad [2] \cos \frac{\pi}{7} + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{7} \right).$$

$$9. \quad [2] \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}. \quad 10. \quad [2] \cos 70^\circ - \sin 70^\circ.$$

Упростить выражение (11—12).

$$11. \quad [2] \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right).$$

$$12. \quad [3] \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

Преобразовать в произведение (13—22).

$$13. \quad [3] \frac{\sin 14^\circ - \cos 86^\circ}{\sin 38^\circ + \cos 70^\circ}.$$

$$14. \quad [5] \sin 40^\circ - 2 \cos 10^\circ \sin^2 15^\circ + \sin 20^\circ.$$

$$15. \quad [2] \cos 5\alpha - \cos \alpha. \quad 16. \quad [4] \sin \alpha - \cos \alpha.$$

$$17. \quad [5] 1 + \sqrt{2} \cos \alpha. \quad 18. \quad [5] \sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha.$$

$$19. \quad [4] \cos \alpha - \cos 3\alpha + 2 \sin 2\alpha.$$

$$20. \quad [6] \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha + \sin 10\alpha.$$

$$21. \quad [7] \cos 5\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 12\alpha.$$

$$22. \quad [8] \sin 3\alpha \sin 2\alpha + \cos 4\alpha \cos \alpha.$$

Доказать тождество (23—26).

$$23. \quad [4] \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$24. \quad [6] \frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta)}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

$$25. \quad [4] \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \alpha + 1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + \cos \frac{\alpha}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$26. \quad [8] \frac{\cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 1} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

Вычислить без помощи таблиц (27—28).

$$27. \quad [8] \cos 36^\circ + \cos 108^\circ.$$

$$28. \quad [8] \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 10^\circ.$$

Преобразовать в сумму (29—30).

$$29. \quad [9] 4 \cos 3\alpha \cos 5\alpha \cos 7\alpha. \quad 30. \quad [9] 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos \frac{5\alpha}{2}.$$

Контрольная работа № 5

Вариант I

1. Вычислить:

1) $\cos 765^\circ$; 2) $\sin \frac{19\pi}{6}$.

2. Вычислить $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ и $-6\pi < \alpha < -5\pi$.

3. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$; 2) $\frac{\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{1 + 2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)}$.

4. Решить уравнение:

1) $2\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)\cos 2x - 1 = \sin 3x \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

5. Доказать тождество $\cos 4\alpha + 1 = \frac{1}{2} \sin 4\alpha (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)$.

Вариант II

1. Вычислить:

1) $\sin 765^\circ$; 2) $\cos \frac{19\pi}{6}$.

2. Вычислить $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = 0,3$ и $-\frac{7\pi}{2} < \alpha < -\frac{5\pi}{2}$.

3. Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$; 2) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha)}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos(-\alpha) + 1}$.

4. Решить уравнение:

1) $2\sin \frac{x}{2} = 1 - \cos x$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos 3x - \cos(\pi - x)\sin 3x = -1$.

5. Доказать тождество $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \cos 4\alpha) = 4 \sin 2\alpha$.

Задания для подготовки к экзамену

1. [6] Доказать тождество $\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha$.
2. [6] Доказать $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = \frac{2}{\cos \alpha}$ при $0 \leq \alpha < \pi$.
3. [5] Найти значение выражения $\frac{\cos 35^\circ + \sqrt{3} \sin 35^\circ}{\sin 1505^\circ}$. Ответ. 2.
4. [7] Вычислить $\cos 2\alpha$, если $4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{ctg} \alpha = 15$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
Ответ. $\frac{15}{17}$.
5. [7] Вычислить $\sin 2\alpha$, если $3 \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha = 8$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.
Ответ. -0,6.
6. [6] Найти значение выражения $\frac{1 + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. Ответ. -1.
7. [6] Найти значение выражения $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha - \sin(2\pi - \alpha)}$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ. $-\sqrt{3}$.

Задания для интересующихся математикой

Примеры с решениями

Доказать тождество

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

Доказательство. Пусть S — левая часть тождества. Преобразуем S , пользуясь формулами (1) — (4) из § 32. Имеем

$$\begin{aligned} S &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right) = \\ &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Вычислить без помощи таблиц $\sin 18^\circ$.

Решение. Так как $90^\circ = 2 \cdot 18^\circ + 3 \cdot 18^\circ$, то $\sin(2 \cdot 18^\circ) = \cos(3 \cdot 18^\circ)$. Отсюда, применяя формулы (1) и (5) из § 29, получаем $2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ$, откуда $2 \sin 18^\circ =$

$= 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3$. Полагая $\sin 18^\circ = t$, получаем уравнение $4t^2 + 2t - 1 = 0$, откуда $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Так как $\sin 18^\circ > 0$, то $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Вычислить без помощи таблиц произведение

$$P = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}.$$

Решение. Углы $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$ увеличиваются последовательно вдвое. Поэтому, умножив и разделив P на $8 \sin \frac{\pi}{9}$ и применив 3 раза формулу синуса двойного аргумента, получим

$$\begin{aligned} P \cdot 8 \sin \frac{\pi}{9} &= 2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} \cdot 4 \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = 2 \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cdot 2 \cos \frac{4\pi}{9} = \\ &= 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \sin \frac{8\pi}{9}. \end{aligned}$$

Так как $\sin \frac{8\pi}{9} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{9}$, то $P \cdot 8 \sin \frac{\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$, откуда $P = \frac{1}{8}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $A = a \sin \alpha + b \cos \alpha$, если по крайней мере одно из чисел a , b не равно нулю, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Решение. Так как $a^2 + b^2 > 0$, то, умножив и разделив данное выражение на $\sqrt{a^2 + b^2}$, запишем его в виде

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right).$$

Рассмотрим точку $M(a; b)$. Эта точка лежит на окружности радиуса $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ с центром в начале координат. Поэтому существует угол φ , такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{R} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда $A = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$. Отсюда следует, что наибольшее значение выражения $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ равно $\sqrt{a^2 + b^2}$, а наименьшее значение равно $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

З а м е ч а н и е. При решении этой задачи получено равенство $a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$. Метод, применённый при преобразовании выражения $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ к виду $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$, называют методом вспомогательного угла.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить без таблиц:

1) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{16}$.

Ответ. 1) $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$; 2) 1.

2. Вычислить:

1) $\sin 5\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

2) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ. 1) $\frac{5}{27}$; 2) $\frac{3}{4}$.

3. Доказать, что:

1) $\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{8}$; 2) $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.

4. Доказать тождество:

1) $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3)$;

2) $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3)$;

3) $\sin^5 \alpha = \frac{1}{16}(\sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin \alpha)$.

5. Доказать, что при всех допустимых значениях α , β , γ справедливо равенство:

1) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma)} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma + \alpha}{2}$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha}$.

6. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то справедливо равенство:

1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

§ 33. Уравнение $\cos x = a$

Справочные сведения

1. Арккосинус числа $a \in [-1; 1]$ (обозначается $\arccos a$) — такое число $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен a , т. е.

$$0 \leq \arccos a \leq \pi, \quad \cos(\arccos a) = a.$$

Если $a \in [0; 1]$, то $0 \leq \arccos a \leq \frac{\pi}{2}$, а если $a \in [-1; 0]$, то $\frac{\pi}{2} < \arccos a \leq \pi$. Если $|a| > 1$, то выражение $\arccos a$ не имеет смысла.

2. Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arccos a) = a. \quad (1)$$

Равенство

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha \quad (2)$$

является верным только при $\alpha \in [0; \pi]$, хотя выражение $\arccos(\cos \alpha)$ имеет смысл при всех $\alpha \in \mathbf{R}$.

Для любого $a \in [-1; 1]$ верно равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \quad (3)$$

3. Если $-1 \leq a \leq 1$, то все корни уравнения

$$\cos x = a \quad (4)$$

определяются формулой

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (5)$$

Если $|a| > 1$, то уравнение (4) не имеет корней.

4. Формулы корней уравнения (4) при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$:

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (6)$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (7)$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (8)$$

Примеры с решениями

Вычислить: 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $A = 2\arccos\frac{1}{2} - 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. 1) Так как $-\frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1; 0)$, то $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — это число из промежутка $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, косинус которого равен $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

$$2) \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \frac{\pi}{6} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \text{ Значит, } A = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Вычислить } \arccos \left(\cos \frac{8\pi}{7} \right).$$

Решение. Равенство (2) не является верным при $\alpha = \frac{8\pi}{7}$, так как число $\frac{8\pi}{7}$ не принадлежит отрезку $[0; \pi]$. Поэтому нужно найти такое число на отрезке $[0; \pi]$, косинус которого равен $\cos \frac{8\pi}{7}$.

По формуле $\cos(\pi + \beta) = \cos(\pi - \beta)$ получаем

$$\cos \frac{8\pi}{7} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{6\pi}{7}, \text{ где } \frac{6\pi}{7} \in [0; \pi].$$

$$\text{Следовательно, } \arccos \left(\cos \frac{8\pi}{7} \right) = \arccos \left(\cos \frac{6\pi}{7} \right) = \frac{6\pi}{7}.$$

Решить уравнение:

$$\begin{array}{lll} 1) 5 \cos x = 2; & 2) \cos 5x = -1; & 3) 2 \cos \frac{x}{2} = 1; \\ 4) \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 0; & 5) 4 \cos^2 x - 3 = 0; & 6) \cos 2x = \frac{3}{2\sqrt{2}}. \end{array}$$

Решение.

1) Запишем уравнение в виде $\cos x = \frac{2}{5}$ и по формуле (5) найдём его корни: $x = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) Применив формулу (8), получим $5x = \pi + 2\pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$.

3) Так как $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, то по формуле (5) получаем $\frac{x}{2} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n$, где $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Поэтому $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4) Применив формулу (6), получим $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

5) Так как $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, то $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что эти две серии корней можно объединить в одну с помощью формулы $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Тогда уравнение примет вид $\cos 2x = \frac{1}{2}$, откуда

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

6) Уравнение $\cos 2x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ не имеет корней, так как $3 > 2\sqrt{2}$ (это следует из неравенства $9 > 8$).

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить (1—4).

1. $\boxed{1}$ $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. $\boxed{1}$ $\arccos \left(-\frac{1}{2} \right)$.

3. $\boxed{2}$ $2 \arccos 1 + 3 \arccos 0$.

4. $\boxed{2}$ $\frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Вычислить (5—12).

5. $\boxed{3}$ $\cos \left(\arccos \frac{1}{2} \right)$. 6. $\boxed{3}$ $\cos \left(\arccos \frac{4}{5} \right)$.

7. $\boxed{4}$ $5 \cos \left(\arccos \frac{1}{3} \right) - 2 \cos \left(\arccos \frac{1}{4} \right)$.

8. $\boxed{4}$ $\sin \left(\arccos 0 + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

9. $\boxed{5}$ $\cos (\pi - \arccos 0,2)$. 10. $\boxed{5}$ $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{2}{5} \right)$.

11. $\boxed{5}$ $\sin (\arccos 0,6)$. 12. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$.

Найти все значения a , при которых выражение имеет смысл (13—15).

13. $\boxed{5}$ $\arccos 2a$. 14. $\boxed{5}$ $\arccos (a - 1)$.

15. $\boxed{5}$ $\arccos (a^2 + 1)$.

Упростить выражение (16—18).

16. $\boxed{4}$ $\arccos \left(\cos \frac{\pi}{3} \right)$. 17. $\boxed{4}$ $\arccos \left(\cos \frac{3\pi}{4} \right)$.

18. $\boxed{6}$ $\arccos \left(\cos \frac{7\pi}{6} \right)$.

Решить уравнение (19—27).

19. $\boxed{2}$ $\cos x = 0,1$. 20. $\boxed{3}$ $\cos 5x = 1$.

21. $\boxed{3}$ $2 \cos 3x = -1$. 22. $\boxed{3}$ $3 \cos \frac{x}{3} = \sqrt{2}$.

23. $\boxed{3}$ $2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{3}$. 24. $\boxed{3}$ $2 \cos (2x - \pi) = 3$.

25. $\boxed{4}$ $\cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x = -1$.

26. $\boxed{4}$ $1 - 2 \sin^2 x = 0$. 27. $\boxed{4}$ $\cos^2 x - \sin^2 x = -1$.

Найти все решения уравнения на заданном отрезке (28—29).

28. [5] $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-4\pi; 4\pi]$. 29. [5] $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0; \pi]$.

30. [6] Найти все решения уравнения $2 \cos x = -1$, удовлетворяющие неравенству $x^2 - \pi^2 < 0$.

Решить уравнение (31—32).

31. [6] $(2 \cos x - \sqrt{3})(\cos 3x - \sqrt{3}) = 0$.

32. [6] $\cos 2x (2 \cos x + \sqrt{2}) = 0$.

Вариант II

Вычислить (1—4).

1. [1] $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. [1] $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

3. [2] $3 \arccos(-1) + 2 \arccos 1$.

4. [2] $\frac{1}{5} \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \arccos 0$.

Вычислить (5—12).

5. [3] $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. 6. [3] $\cos(\arccos 0,3)$.

7. [4] $2 \cos \left(\arccos \frac{1}{8} \right) + 3 \cos \left(\arccos \frac{5}{12} \right)$.

8. [4] $\operatorname{tg} \left(\arccos(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

9. [5] $\cos(\pi + \arccos 0,1)$. 10. [5] $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{3}{7} \right)$.

11. [5] $\sin(\arccos 0,8)$. 12. [5] $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{1}{3} \right)$.

Найти все значения a , при которых выражение имеет смысл (13—15).

13. [5] $\arccos \frac{a}{3}$. 14. [5] $\arccos(2 - a)$. 15. [5] $\arccos(a^2 + 2)$.

Упростить выражение (16—18).

16. [4] $\arccos \left(\cos \frac{\pi}{4} \right)$. 17. [4] $\arccos \left(\cos \frac{2\pi}{3} \right)$.

18. [6] $\arccos \left(\cos \frac{5\pi}{4} \right)$.

Решить уравнение (19—27).

19. [2] $\cos x = 0,7$. 20. [3] $\cos \frac{x}{2} = 0$.

21. [3] $2 \cos 2x = \sqrt{2}$. 22. [3] $\frac{1}{3} \cos \frac{x}{4} = \frac{1}{9}$.

$$23. \quad \boxed{3} \quad 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = -1. \qquad 24. \quad \boxed{3} \quad \cos \left(3x + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{5}{2}.$$

$$25. \quad \boxed{4} \quad \cos \frac{5}{2}x \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{5}{2}x \sin \frac{x}{2} = 1.$$

$$26. \quad \boxed{4} \quad 2 \cos^2 x - 1 = 0,5. \qquad 27. \quad \boxed{4} \quad \cos^2 2x - \sin^2 2x = 0.$$

Найти все решения уравнения на заданном отрезке (28—29).

$$28. \quad \boxed{5} \quad \cos \frac{x}{3} = \frac{1}{2}, \quad [-6\pi; 6\pi]. \qquad 29. \quad \boxed{5} \quad \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad [0; 2\pi].$$

$$30. \quad \boxed{6} \quad \text{Найти все решения уравнения } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ удовлетворяющие неравенству } \frac{\pi^2}{4} - x^2 > 0.$$

Решить уравнение (31—32).

$$31. \quad \boxed{6} \quad (2 \cos 4x - 4)(2 \cos x + 1) = 0.$$

$$32. \quad \boxed{6} \quad \cos \frac{x}{2} (\cos x + 1) = 0.$$

§ 34. Уравнение $\sin x = a$

Справочные сведения

1. Арксинус числа $a \in [-1; 1]$ (обозначается $\arcsin a$) — такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a , т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin a) = a.$$

Если $a \in [0; 1]$, то $0 \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$, а если $a \in [-1; 0]$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a < 0$.

Если $|a| > 1$, то выражение $\arcsin a$ не имеет смысла.

2. Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin a) = a. \qquad (1)$$

Равенство

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha \qquad (2)$$

является верным при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, хотя выражение в левой части имеет смысл при всех $\alpha \in \mathbf{R}$.

Для любого $a \in [-1; 1]$ верно равенство

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a. \qquad (3)$$

3. Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$

4. Если $|a| \leq 1$, то все корни уравнения

$$\sin x = a \quad (5)$$

определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Если $|a| > 1$, то уравнение (5) не имеет корней.

5. Формулы корней уравнения (5) при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (7)$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8)$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Примеры с решениями

Вычислить: 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

$$2) \quad A = 3\arcsin 1 + 2\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. 1) Так как $-\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 0)$, то $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — это число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, синус которого равен $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

$$2) \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \text{ так как } \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ и } \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}. \text{ Значит, } A = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}.$$

Вычислить: 1) $\arcsin\left(\sin \frac{25\pi}{8}\right)$; 2) $\arcsin\left(\cos \frac{7\pi}{9}\right)$.

Решение.

1) Так как равенство (2) не является верным при $\alpha = \frac{25\pi}{8}$, то нужно заменить $\sin \frac{25\pi}{8}$ на синус числа из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Заметим, что $\sin \frac{25\pi}{8} = \sin\left(\frac{25\pi}{8} - 2\pi\right) = \sin \frac{9\pi}{8} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin \frac{\pi}{8} = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, где $-\frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Поэтому } \arcsin\left(\sin \frac{25\pi}{8}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = -\frac{\pi}{8}.$$

$$2) \quad \cos \frac{7\pi}{9} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{7\pi}{9} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin \frac{5\pi}{18} = \sin\left(-\frac{5\pi}{18}\right).$$

$$\text{Поэтому } \arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{9}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{18}\right)\right) = -\frac{5\pi}{18}.$$

Можно было поступить иначе и воспользоваться равенством (4).

$$\text{Так как } \arccos\left(\cos\frac{7\pi}{9}\right) = \frac{7\pi}{9}, \text{ то } \arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{9}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{9} = -\frac{5\pi}{18}.$$

Решить уравнение:

$$1) 4 \sin x = 3; \quad 2) \sin 4x = -1; \quad 3) 2 \sin \frac{x}{2} = -\sqrt{3};$$

$$4) \sin\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0; \quad 5) 3\sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{7};$$

$$6) 9 \sin^2 x - 1 = 0; \quad 7) \sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = 1.$$

Решение.

1) Так как $\sin x = \frac{3}{4}$, то по формуле (6) получаем

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2) По формуле (9) находим $4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3) Корни уравнения $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ найдём по формуле (6).

Учитывая, что $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, получаем

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

откуда $x = (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4) Применив формулу (7), находим $5x + \frac{3\pi}{4} = \pi n$, откуда $x = -\frac{3\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

5) Уравнение $\sin x = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$ не имеет корней, так как $\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} > 1$

(это вытекает из неравенства $28 > 27$).

6) Так как $\sin^2 x = \frac{1}{9}$, то $\sin x = \frac{1}{3}$, $\sin x = -\frac{1}{3}$, откуда $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Заметим, что эти две серии корней можно записать в виде одной формулы, если заменить $\sin^2 x$ на $\frac{1 - \cos 2x}{2}$. Тогда

получим $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{9}$, $\cos 2x = \frac{7}{9}$, откуда $2x = \pm \arccos \frac{7}{9} + 2\pi n$,

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{9} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7) Применяя формулу синуса разности, запишем уравнение в виде $\sin(5x - 2x) = 1$, или $\sin 3x = 1$, откуда по формуле (8) получим $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить (1—4).

1. [1] $\arcsin(-1)$.

2. [1] $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. [2] $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{5}\arcsin 0$.

4. [2] $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Вычислить (5—14).

5. [3] $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$.

6. [3] $\sin(\arcsin 0,3)$.

7. [3] $3\sin\left(\arcsin \frac{2}{3}\right) + 4\sin\left(\arcsin \frac{1}{6}\right)$.

8. [5] $\sin\left(\pi - \arcsin \frac{2}{3}\right)$.

9. [5] $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos 0,31\right)$.

10. [4] $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$.

11. [4] $\cos\left(\arcsin 0 + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

12. [5] $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$.

13. [5] $\cos\left(\arcsin \frac{5}{13}\right)$.

14. [5] $\operatorname{tg}(\arcsin 0,6)$.

Найти все значения a , при которых выражение имеет смысл (15—17).

15. [5] $\arcsin \frac{1}{2}a$.

16. [5] $\arcsin(1 - 3a)$.

17. [5] $\arcsin(4a^2 + 1)$.

Упростить выражение (18—21).

18. [4] $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$.

19. [4] $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$.

20. [6] $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$.

21. [6] $\arcsin\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)$.

Решить уравнение (22—30).

22. [2] $\sin x = 0,35$.

23. [3] $\sin \frac{x}{2} = 1$.

24. [3] $2\sin 3x = -1$.

25. [3] $\frac{1}{2}\sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$26. \quad \boxed{3} \quad 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} = 0.$$

$$27. \quad \boxed{3} \quad 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 3 = 0.$$

$$28. \quad \boxed{4} \quad \sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = 0.$$

$$29. \quad \boxed{5} \quad \sin 2x (1 + \cos 2x) = 4 \cos^2 x.$$

$$30. \quad \boxed{5} \quad 2 - 6 \sin x \cos x = 0.$$

Найти все решения уравнения на заданном отрезке (31—32).

$$31. \quad \boxed{5} \quad \sin 2x = -\frac{1}{2}, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right].$$

$$32. \quad \boxed{5} \quad 2 \sin \frac{x}{3} = \sqrt{3}, \quad [-2\pi; 2\pi].$$

$$33. \quad \boxed{6} \quad \text{Найти все решения уравнения } \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0,5, \text{ удовлетворяющие неравенству } x^2 - 4\pi^2 < 0.$$

Решить уравнение (34—36).

$$34. \quad \boxed{6} \quad (2 \sin x + 1)(2 + \sin x) = 0.$$

$$35. \quad \boxed{6} \quad (1 - 4 \sin x \cos x)(\sin 6x - 1) = 0.$$

$$36. \quad \boxed{6} \quad (\sqrt{3} - 2 \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0.$$

Вариант II

Вычислить (1—4).

$$1. \quad \boxed{1} \quad \arcsin 1.$$

$$2. \quad \boxed{1} \quad \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$3. \quad \boxed{2} \quad 0,7 \arcsin 0 + \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right).$$

$$4. \quad \boxed{2} \quad \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Вычислить (5—14).

$$5. \quad \boxed{3} \quad \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$6. \quad \boxed{3} \quad \sin (\arcsin 0,2).$$

$$7. \quad \boxed{3} \quad 5 \sin \left(\arcsin \frac{3}{5} \right) + 2 \sin \left(\arcsin \frac{1}{8} \right).$$

$$8. \quad \boxed{5} \quad \sin \left(\pi + \arcsin \frac{1}{7} \right).$$

$$9. \quad \boxed{5} \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - \arccos 0,52 \right).$$

$$10. \quad \boxed{4} \quad \sin \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$11. \quad \boxed{4} \quad \cos \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \arcsin 0 \right).$$

$$12. \quad \boxed{5} \quad \sin \left(\arccos \frac{4}{5} \right). \quad 13. \quad \boxed{5} \quad \cos \left(\arcsin \frac{12}{13} \right). \quad 14. \quad \boxed{5} \quad \operatorname{ctg} (\arcsin 0,8).$$

Найти все значения a , при которых выражение имеет смысл (15—17).

$$15. \quad \boxed{5} \quad \arcsin 0,3a. \quad 16. \quad \boxed{5} \quad \arcsin (2a + 1). \quad 17. \quad \boxed{5} \quad \arcsin (1 + 2a^2).$$

Упростить выражение (18—21).

18. [4] $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$.

19. [4] $\arcsin(\sin(-0,2\pi))$.

20. [6] $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right)$.

21. [6] $\arcsin\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$.

Решить уравнение (22—30).

22. [2] $\sin x = 0,24$.

23. [3] $\sin \frac{x}{3} = -1$.

24. [3] $-2 \sin 5x = 1$.

25. [3] $\frac{1}{3} \sin \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

26. [3] $2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{2} = 0$.

27. [3] $3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 4 = 0$.

28. [4] $\sin x \cos 5x + \sin 5x \cos x = 0$.

29. [5] $\cos 2x (1 - \cos 2x) = 3 \sin^2 x$.

30. [5] $10 \sin 2x \cos 2x - 3 = 0$.

Найти все решения уравнения на заданном отрезке (31—32).

31. [5] $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, [-2\pi; 2\pi]$.

32. [5] $2 \sin 3x = \sqrt{3}, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

33. [6] Найти все решения уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, удовлетворяющие неравенству $\pi x - x^2 > 0$.

Решить уравнение (34—36).

34. [4] $(1 - \sin x)(2 \sin x - 4) = 0$.

35. [6] $(2\sqrt{3} - 8 \sin x \cos x)(\sin 3x + 1) = 0$.

36. [6] $(1 - 2 \sin x)(2 \cos^2 x - 1) = 0$.

§ 35. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Справочные сведения

1. Арктангенс числа $a \in \mathbf{R}$ (обозначается $\operatorname{arctg} a$) — такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a , т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = a.$$

2. Для любого $a \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a. \quad (1)$$

Равенство

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha \quad (2)$$

является верным только при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Для любого $a \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \quad (3)$$

3. Для любого $a \in \mathbf{R}$ уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни, определяемые формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

Примеры с решениями

Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $A = 3 \operatorname{arctg} 1 - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

Решение. 1) Искомое значение — число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

2) Поскольку $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, имеем

$$A = 3 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}.$$

2. Вычислить: 1) $A = 4 \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) - 3 \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$;

2) $B = 2 \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2\right) + 4 \operatorname{tg}\left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{2}\right)$.

Решение.

1) С помощью равенства (1) получаем $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = -\frac{1}{5}$. Поэтому $A = 4 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{29}{15}$.

2) По формуле приведения $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, далее с помощью равенства (1) находим

$$B = -2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) + 4 \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{2}\right) = -2 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 2.$$

Решить уравнение:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 2) $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 1 = 0$; 3) $4 - 9 \operatorname{tg}^2 3x = 0$.

Решение.

1) По формуле (4) находим $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) Записав уравнение в виде $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, по формуле (4) находим $\frac{x}{3} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n$, где $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$.

Поэтому $x = 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\pi n = -\frac{\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3) Запишем уравнение в виде $\operatorname{tg}^2 3x = \frac{4}{9}$, откуда $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} 3x = -\frac{2}{3}$. Если $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}$, то $3x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n$, $x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $\operatorname{tg} 3x = -\frac{2}{3}$, то $x = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить (1—4).

1. [1] $\operatorname{arctg} 1$. 2. [1] $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$. 3. [2] $2 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + 3 \operatorname{arctg} 1$.
4. [2] $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-1) + \arcsin 1 - \arccos 1$.

Вычислить (5—12).

5. [3] $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$. 6. [3] $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1))$. 7. [3] $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3,5)$.
8. [4] $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \arccos \frac{1}{2} \right)$.
9. [4] $2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1) + 3 \sin(\arcsin 0,5) - \cos(\arccos 0,3)$.
10. [5] $\operatorname{tg}(\pi + \operatorname{arctg} 3)$. 11. [5] $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 1,7 \right)$.
12. [5] $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{\sqrt{7}}{4} \right)$.
13. [7] Доказать, что при любом $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

Вычислить (14—15).

14. [5] $\cos(\operatorname{arctg} 0,5)$. 15. [5] $\sin \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right)$.

Упростить выражение (16—19).

16. [4] $2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)$. 17. [4] $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right)$.
18. [5] $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{9\pi}{8} \right)$. 19. [5] $\operatorname{arctg} \left(\sin \frac{\pi}{3} \right)$.

Решить уравнение (20—28).

20. [2] $\operatorname{tg} x = 5$. 21. [3] $\operatorname{tg} 4x = 1$. 22. [3] $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -\sqrt{3}$.
23. [3] $\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$. 24. [3] $\operatorname{tg} 3x = 5,5$.
25. [5] $\operatorname{tg}(\pi + x) + 2 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$. 26. [5] $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = -1$.
27. [5] $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$. 28. [5] $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{3}$.

Найти все решения уравнения на заданном отрезке (29—30).

29. [5] $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

30. [5] $3 \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}, [0; \pi]$.

Решить уравнение (31—32).

31. [6] $\cos x \operatorname{tg} x = 0$.

32. [7] $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} = 0$.

Вариант II

Вычислить (1—4).

1. [1] $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

2. [1] $\operatorname{arctg}(-1)$.

3. [2] $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 + 2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

4. [2] $\arcsin(-1) + 2 \operatorname{arctg} 1 - \arccos(-1)$.

Вычислить (5—12).

5. [3] $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

6. [3] $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 0)$.

7. [3] $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5)$.

8. [4] $\cos\left(\operatorname{arctg} 1 + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

9. [4] $2 \cos(\arccos 0,4) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4) + \sin(\arcsin 0,8)$.

10. [5] $\operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} 0,6)$.

11. [5] $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 3,5\right)$.

12. [5] $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{3}{4}\right)$.

13. [7] Доказать, что при любом $a \in \mathbf{R}$ справедливо равенство
$$\sin(\operatorname{arctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Вычислить (14—15).

14. [5] $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$.

15. [5] $\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{5})$.

Упростить выражение (16—19).

16. [4] $3 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)$.

17. [4] $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

18. [5] $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}\right)$.

19. [5] $\operatorname{arctg}\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)$.

Решить уравнение (20—28).

20. [2] $\operatorname{tg} x = 2$.

21. [3] $\operatorname{tg} 3x = -1$.

22. [3] $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

23. [3] $3 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$.

24. [3] $3 \operatorname{tg} x = 6$.

$$25. \quad \boxed{5} \quad 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

$$26. \quad \boxed{5} \quad \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} = 1.$$

$$27. \quad \boxed{5} \quad 9 \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0.$$

$$28. \quad \boxed{5} \quad \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Найти все решения уравнения на заданном отрезке (29—30).

$$29. \quad \boxed{5} \quad \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}, \quad \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi \right].$$

$$30. \quad \boxed{5} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1, \quad [-\pi; 2\pi].$$

Решить уравнение (31—32).

$$31. \quad \boxed{6} \quad \cos x \operatorname{tg} x = 0.$$

$$32. \quad \boxed{7} \quad \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

§ 36. Решение тригонометрических уравнений

Справочные сведения

Решение тригонометрических уравнений сводится в итоге к решению одного из простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Напомним общие формулы корней этих уравнений:

Уравнение	Корни
$\sin x = a, a \leq 1 \quad (1)$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1 \quad (2)$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R} \quad (3)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Примеры с решениями

Решить уравнение $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$.

Решение. Полагая $\sin x = y$, получаем уравнение $2y^2 - 3y - 2 = 0$, имеющее корни $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Если $y = -\frac{1}{2}$, то $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$. Если $y = 2$, то $\sin x = 2$. Это уравнение не имеет корней.

Отв е т. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решить уравнение $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 3$.

Решение. Заменим $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид $2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 3$, или $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$, откуда $\cos x = -1$, $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n$, а если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Ответ. $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решить уравнение $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 2$.

Решение. Записав уравнение в виде $\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 2$ и умножив обе его части на $\operatorname{tg} x$, получим $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = 3$. Если $\operatorname{tg} x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, а если $\operatorname{tg} x = 3$, то $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$.

В процессе решения мы умножили обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$, что могло привести к появлению посторонних корней, которые являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 0$. Так как значения x , при которых $\operatorname{tg} x = 0$, не являются корнями уравнения $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, то это уравнение и исходное уравнение равносильны.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решить уравнение $\cos 2x - 2 \cos x = 0$.

Решение. Используя формулу $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ и полагая $\cos x = t$, получаем уравнение $2t^2 - 2t - 1 = 0$, имеющее корни $t_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Так как $-1 < t_1 < 0$, $t_2 > 1$, то $x = \pm \arccos t_1 + 2\pi n$, где $\arccos t_1 = \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

Ответ. $x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$

Однородные уравнения — это уравнения вида

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= 0, \\ a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x &= 0. \end{aligned}$$

Решить уравнение $2 \sin x + 5 \cos x = 0$.

Решение. Заметим, что $\cos x \neq 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Поэтому, разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим уравнение $2 \operatorname{tg} x + 5 = 0$, равносильное исходному. Отсюда находим $\operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$. Ответ. $x = -\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решить уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, получаем равносильное уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 4$, $\operatorname{tg} x = -1$. Ответ. $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

З а м е ч а н и е. Уравнение $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ можно свести к однородному, если воспользоваться тождеством $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Уравнения вида $a \cos x + b \sin x = c$

Рассмотрим уравнение $a \cos x + b \sin x = c$.

Будем считать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ (если $a = 0$ или $b = 0$, то уравнение сводится к простейшему).

Уравнение можно свести к квадратному относительно $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, так как $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Другой способ решения уравнения основан на введении вспомогательного угла. Тогда уравнение примет вид

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$, т. е. $c^2 \leq a^2 + b^2$, то уравнение имеет корни, а если $c^2 > a^2 + b^2$, то оно не имеет корней.

Решить уравнение $4 \cos x + 3 \sin x = 2$.

Р е ш е н и е. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, получаем уравнение $\frac{4}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x = \frac{2}{5}$, которое можно записать в виде $\sin(x + \varphi) = \frac{2}{5}$, где $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, и поэтому $\varphi = \arcsin \frac{4}{5}$.

Отсюда находим $x = -\varphi + (-1)^n \arcsin \frac{2}{5} + \pi n$.

О т в е т. $x = -\arcsin \frac{4}{5} + (-1)^n \arcsin \frac{2}{5} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнения, решаемые с помощью разложения их левой части на множители

Решить уравнение $2 \sin x \cos 2x - 1 + \sin x - 2 \cos 2x = 0$.

Р е ш е н и е. Сгруппируем слагаемые левой части уравнения и получим

$$\begin{aligned} 2 \cos 2x (\sin x - 1) + (\sin x - 1) &= 0, \\ (\sin x - 1)(2 \cos 2x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\sin x = 1$ и $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. В подобных случаях говорят также, что уравнение распадается на два уравнения.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решить уравнение $\sin x \cos 3x = \cos x \sin 5x$.

Решение. Преобразуя в обеих частях уравнения произведение в сумму (см. формулу (5) § 11), запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x),$$
$$\sin 6x + \sin 2x = 0.$$

По формуле суммы синусов получаем $2 \sin 4x \cos 2x = 0$. Заметим, что все корни уравнения $\cos 2x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 4x = 0$, и найдём все решения исходного уравнения: $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решить уравнение $\cos^2 2x + \sin^2 x = \cos^2 3x$.

Решение. Применяя формулы понижения степени, запишем уравнение в виде

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2}.$$

По формулам суммы и разности косинусов последовательно преобразуем полученное уравнение:

$$\cos^2 2x = \cos 4x \cos 2x, \quad \cos 2x (\cos 2x - \cos 4x) = 0,$$
$$2 \cos 2x \sin 3x \sin x = 0.$$

Так как все корни уравнения $\sin x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 3x = 0$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos 2x = 0$, $\sin 3x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Привести уравнение к квадратному относительно одной из тригонометрических функций и найти его корни (1—8).

1. [2] $\sin^2 x = 1$. 2. [2] $2 \cos^2 x = 1$. 3. [3] $\cos^2 x = \cos x$.

4. [3] $2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0$. 5. [3] $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{ctg} x$.

6. [3] $\operatorname{tg} x = 2 - \operatorname{tg}^2 x$. 7. [4] $2 \sin^2 x + \cos^2 x - 3 \sin x - 5 = 0$.

8. [4] $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$.

Решить уравнение, разложив на множители его левую часть (9—13).

9. [4] $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$. 10. [4] $3 \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$.

11. [4] $\sin x - \sin 3x = 0$. 12. [4] $\cos 5x - \cos 3x = 0$.

13. [5] $\sin 7x - \sin 3x - \cos 5x = 0$.

Решить однородное уравнение первой степени (14—16).

14. [4] $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$.

15. [4] $\sin x - \cos x = 0$.

16. [4] $3 \sin x + 2 \cos x = 0$.

Решить однородное уравнение второй степени (17—18).

17. [5] $\sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0$.

18. [5] $6 \cos^2 x + \sin^2 x - 5 \sin x \cos x = 0$.

Решить уравнение (19—27).

19. [5] $2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$.

20. [5] $\sin x + 2 \cos x = |\sin x|$.

21. [6] $\sin 2x - 5 \sin x + 5 \cos x + 5 = 0$.

22. [6] $3 \sin x + 4 \cos x = 1$.

23. [6] $\sin 3x = \cos 5x$.

24. [6] $\sin 2x \cos 4x = \sin 6x \cos 8x$.

25. [6] $2 \cos 2x + 5 \cos^2 x = 8 \sin 2x - 6$.

26. [7] $\cos x - \cos 3x = 4 \sin^3 x$.

27. [7] $\cos 6x + 6 \cos 2x = 0$.

28. [7] Найти все корни уравнения $6 + 5 \sin 2x = 10 \cos^2 x$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

Вариант II

Привести уравнение к квадратному относительно одной из тригонометрических функций и найти его корни (1—8).

1. [2] $\cos^2 x = 1$.

2. [2] $4 \sin^2 x = 3$.

3. [3] $\sin^2 x = \sin x$.

4. [3] $3 \cos^2 x + \cos x - 4 = 0$.

5. [3] $3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

6. [3] $\operatorname{tg}^2 x - 5 = 4 \operatorname{tg} x$.

7. [4] $\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 7 = 0$.

8. [3] $2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0$.

Решить уравнение, разложив на множители его левую часть (9—13).

9. [4] $\sin^2(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$.

10. [4] $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$.

11. [4] $\cos x + \cos 3x = 0$.

12. [4] $\sin 2x + \sin 3x = 0$.

13. [5] $\cos 7x - \cos x - \sin 4x = 0$.

Решить однородное уравнение первой степени (14—16).

14. [4] $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

15. [4] $\sin x + \cos x = 0$.

16. [4] $3 \sin x - 5 \cos x = 0$.

Решить однородное уравнение второй степени (17—18).

17. [5] $\sin^2 x + 6 \cos^2 x + 7 \sin x \cos x = 0$.

18. [5] $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Решить уравнение (19—27).

19. [5] $4 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

20. [5] $\cos x - 2 \sin x = |\cos x|$.

21. [6] $\sin 2x + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$.

22. [6] $4 \sin x - 3 \cos x = 2$. 23. [6] $\cos 3x = \sin 5x$.

24. [6] $\cos 7x \cos 13x = \cos x \cos 19x$.

25. [6] $6 \cos 2x + 8 = 7 \sin 2x - 8 \cos^2 x$.

26. [7] $\sin x - \sin 3x = 4 \sin^2 x \cos x$.

27. [7] $\sin 3x - 7 \sin x = 0$.

28. [7] Найти все корни уравнения $\sin 2x + 16 \cos^2 x = 4$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

§ 37*. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

Примеры с решениями

Решить неравенство $\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Построим единичную окружность и проведём через точку оси Oy с ординатой $\frac{1}{\sqrt{2}}$ прямую l , параллельную оси Ox (рис. 45). Прямая l пересекает единичную окружность в точках M_1 и M_2 . Из рисунка видно, что все точки единичной окружности, расположенные ниже прямой l , имеют ординату, меньшую $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Точке M_1 соответствует

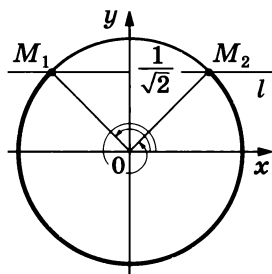


Рис. 45

угол $\frac{3\pi}{4}$, а точке M_2 — угол $2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$.

Отв. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{9\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Решить неравенство $4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 < 0$.

Решение. Полагая $\cos x = t$, получаем квадратное неравенство $4t^2 - 8t + 3 < 0$, равносильное неравенству $\left(t - \frac{1}{2} \right) \left(t - \frac{3}{2} \right) < 0$.

Поэтому данное в условии неравенство равносильно каждому из неравенств $\left(\cos x - \frac{3}{2} \right) \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) < 0$, $\left(\frac{3}{2} - \cos x \right) \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) > 0$,

$\cos x > \frac{1}{2}$. На отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет корни $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$, а решениями неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ на этом отрезке являются все числа из интервала $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$. Множество решений неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ и равносильного ему исходного неравенства есть множество интервалов

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Решить неравенство (1—4).

1. [6] $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. [6] $\sin x \leq \frac{1}{2}$.

3. [7] $2\sin^2 x - \sin x - 3 < 0$.

4. [7] $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 > 0$.

Вариант II

Решить неравенство (1—4).

1. [6] $\cos x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. [6] $\sin 2x > \frac{1}{2}$.

3. [7] $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 \leq 0$.

4. [7] $\sin x > \cos^2 x$.

Контрольная работа № 6

Вариант I

1. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$; 2) $3 \operatorname{tg} 2x + \sqrt{3} = 0$.

2. Найти решение уравнения $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ на отрезке $[0; 3\pi]$.

3. Решить уравнение:

1) $3 \cos x - \cos^2 x = 0$;

2) $6 \sin^2 x - \sin x = 1$; 3) $4 \sin x + 5 \cos x = 4$;

4) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + \frac{1}{4}$.

Вариант II

1. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$; 2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$.

2. Найти решение уравнения $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ на отрезке $[0; 4\pi]$.

3. Решить уравнение:

1) $\sin^2 x - \sin x = 0$;

2) $10 \cos^2 x + 3 \cos x = 1$; 3) $5 \sin x + \cos x = 5$;

4) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 2x - \frac{1}{2}$.

Задания для подготовки к экзамену

1. [3] Решить уравнение: 1) $4^{\cos x} = 2$; 2) $5^{\sin x} = 1$.

Ответ. 1) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. [5] Найти все корни уравнения $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 0$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Ответ. $-\frac{5\pi}{4}$; $-\pi$; $-\frac{3\pi}{4}$; 0 ; $\frac{3\pi}{4}$; π ; $\frac{5\pi}{4}$.

3. [5] Решить уравнение $0,5 \sin 2x + \cos^2 x = 4 \cos 2x$ и указать какое-нибудь его решение, удовлетворяющее неравенству $\pi x - x^2 > 0$. Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \arctg \frac{3}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; неравенству $\pi x - x^2 > 0$ удовлетворяет, например, решение $\frac{3\pi}{4}$.

З а м е ч а н и е. При разных способах решения могут получаться различные по виду ответы.

4. [6] Решить уравнение $x^2 + 2x + 4 = 3 \sin \frac{3\pi x}{2}$.

У к а з а н и е. Учесть, что $3 \sin \frac{3\pi x}{2} \leq 3$, а $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$.

Ответ. $x = -1$.

5. [6] Решить уравнение $x^2 - 2x + 2 = 2 \cos 2\pi x - 1$.

Ответ. $x = 1$.

6. [7] Решить уравнение $\sqrt{9 - x^2} \cdot \sin 2x = 0$.

У к а з а н и е. Произведение двух множителей равно нулю, когда один из них равен нулю, а другой имеет смысл.

Ответ. $x = 3$, $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $x = -3$.

7. [7] Найти значение выражения $5 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right)$.

Ответ. 4.

8. [7] Сколько корней имеет уравнение

$$\left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) \cdot \log_2 (4 - x^2) = 0?$$

Ответ. 4.

9. [8] Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $\cos^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 = 0$. Найти $\operatorname{tg} x_0$. Ответ. 1.

10. [9] Найти все значения x , при которых выражение $\sqrt{3 - 2x - x^2} \times \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} x^2 \right)$ имеет смысл и не обращается в нуль.

Ответ. При всех $x \in (-3; 1)$, за исключением точек $\left\{0; -\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{3}; -\sqrt{\frac{9}{2}}; -\sqrt{6}; -\sqrt{\frac{15}{2}}\right\}$.

11. [6] Найти значение выражения $\sin 3\alpha$, если α удовлетворяет условию $\sin 6\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$.

Решить уравнение (12—14).

12. [5] $\sin 2x - \cos x = 2 \sin x - 1$. Ответ. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

13. [5] $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = 2 \sin x$. Ответ. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

14. [6] $\cos^4 x + 0,5\sqrt{3} = \sin^4 x$. Ответ. $\pm \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

15. [8] Найти все решения уравнения $\left| \cos x - \frac{1}{4} \right| = 8 \cos^2 \frac{x}{2} - 5$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Указание. Понизить степень уравнения.

Ответ. $\arccos \frac{1}{4}, -\arccos \frac{1}{4}$.

16. [9] Найти все значения a , при которых уравнения $\sin x + \cos x = 1$ и $\cos \frac{x}{2} = a$ имеют хотя бы один общий корень.

Ответ. $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 1$.

17. [9] При каких значениях a выражение

$$1 + \sin x (3 \sin x + a \cos x)$$

не равно нулю ни при каких значениях x ? Ответ. $(-4; 4)$.

Решить уравнение (18—24).

18. [6] $\sqrt{\cos 2x} = 1 + 2 \sin x$. Ответ. $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

19. [7] $\sqrt{3 \sin^2 x - 2} = 3 \cos x - 1$. Ответ. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

20. [8] $\sin x \sin 5x \sin 9x = 1$. Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

21. [8] $\sin x \sin 9x \sin 13x = 1$. Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

22. [7] 1) $\sin 3x \cos x = \sin 5x \cos 3x$;

2) $\sin 2x \cos 5x = \sin 3x \cos 4x$.

Ответ. 1) $x = \frac{\pi n}{2}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}$;

2) $x = \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

23. [7] 1) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + \frac{1}{4}$.

Ответ. 1) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

24. [7] 1) $\cos^6 x - \sin^6 x = 2 \cos^2 2x$;

2) $\sin^6 x - \cos^6 x + 1 = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

Ответ. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(4 - \sqrt{13}) + \pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

25. [8] Найти наименьший положительный корень уравнения:

1) $4 \cos^2 x = 2 - 23 \sin x - 3 \cos 2x$;

2) $2(1 + \sin^2 x) = 2 \cos 2x - 5 \cos x$.

Ответ. 1) $\pi + \arcsin \frac{1}{5}$; 2) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Задания для интересующихся математикой

Примеры с решениями

уравнение $\sin^2 2x + \sin^2 4x = 1 - \frac{\cos 2x}{\cos 3x}$.

Решение. Исходное уравнение равносильно каждому из уравнений $\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = 1 - \frac{\cos 2x}{\cos 3x}, \frac{\cos 4x + \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x}{\cos 3x}$,

$\cos 6x \cos 2x = \frac{\cos 2x}{\cos 3x}$, а при выполнении условия $\cos 3x \neq 0$ равно-

сильно уравнению $\cos 2x (\cos 3x \cos 6x - 1) = 0$.

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$, а уравнение $\cos 3x \cos 6x = 1$ может иметь корни только в случае, когда $|\cos 3x| = 1$.

Если $\cos 3x = 1$, то $\cos 6x = 1$ и $x = \frac{2\pi n}{3}$, а если $\cos 3x = -1$, то $\cos 6x = 1$, и тогда $\cos 3x \cos 6x = -1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Решить уравнение $\frac{\cos 3x}{\cos x} + \frac{2|\cos x|}{\cos 3x} = -1$.

Решение. Пусть $t = \frac{\cos 3x}{\cos x}$.

а) Если $\cos x > 0$, то $t + \frac{2}{t} = -1$, или $t^2 + t + 2 = 0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

б) Если $\cos x < 0$, то $t - \frac{2}{t} = -1$, или $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Пусть $t = -2$, тогда $\frac{\cos 3x}{\cos x} = -2$, или $\frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\cos x} = -2$.

Так как $\cos x \neq 0$, то $4 \cos^2 x - 3 = -2$, $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$,
 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Пусть $t = 1$, тогда $4 \cos^2 x - 3 = 1$, $\cos^2 x = 1$, $\cos x = -1$,
 $x = \pi + 2\pi n$.

Ответ. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решить уравнение $\sqrt{7 - \cos x - 6 \cos 2x} = 4 \sin x$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 7 - \cos x - 6 \cos 2x = 16 \sin^2 x, \\ \sin x \geq 0, \end{cases}$$

а уравнение системы равносильно каждому из уравнений

$$\begin{aligned} 7 - \cos x - 6(2 \cos^2 x - 1) &= 16(1 - \cos^2 x), \\ 4 \cos^2 x - \cos x - 3 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $\cos x = 1$, $\cos x = -\frac{3}{4}$.

Условию $\sin x \geq 0$ удовлетворяют следующие серии корней:

$$x = 2\pi n, \quad x = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Решить уравнение $\frac{\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4}$.

Решение. Так как

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}, \quad \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}, \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x &= \\ = \frac{3}{4}(\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x) &= \frac{3}{4} \sin 4x, \end{aligned}$$

и исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\sin 4x}{|\sin 2x|} = 1. \quad (1)$$

а) Если $\sin 2x > 0$, то из уравнения (1) следует, что $\cos 2x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Условию $\sin 2x > 0$ удовлетворяют значения

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

б) Если $\sin 2x < 0$, то $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а условия $\sin 2x < 0$ удовлетворяют значения

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad (3)$$

Заметим, что серии корней уравнений (2) и (3) можно объединить в одну серию

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

В самом деле, если $k = 2n$, то из уравнения (4) следует, что $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, а если $k = 2n - 1$, то из уравнения (4) получаем

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ. } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbf{Z}.$$

Решить уравнение

$$3 + \cos 6x = 2 \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 4x} - 4 \operatorname{tg}^2 4x.$$

Решение. Если $\cos 4x \neq 0$, то исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$4(1 + \operatorname{tg}^2 4x) + \cos 6x - 1 = 2 \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 4x},$$

$$\frac{4}{\cos^2 4x} - 2 \sin^2 3x = 2 \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 4x}.$$

Полагая $\sin 3x \cos 4x = t$, получаем уравнение $t^2 + t - 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Так как $|t| \leq 1$, то $t = 1$, т. е.

$$\sin 3x \cos 4x = 1. \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно исходному, а уравнение

$$\sin 4x \cos 3x = 0 \quad (2)$$

является следствием уравнения (1). Из уравнений (1) и (2) получаем $\sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x = -1$, т. е.

$$\sin x = -1. \quad (3)$$

Уравнение (3) является следствием уравнения (1) и имеет корни

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

Проверка показывает, что значения x , определяемые формулой (4), являются корнями уравнения (1) и исходного уравнения.

$$\text{Ответ. } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

З а м е ч а н и е. Стандартный способ решения уравнения (1) основан на том, что уравнение (1) равносильно совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 4x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \cos 4x = -1. \end{cases}$$

Найти все значения a , при которых уравнение

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a$$

имеет корни, и решить это уравнение.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4x),$$

полученной в § 30 (см. пример 2). Тогда данное уравнение примет вид $\cos 4x = \frac{8a - 5}{3}$. Это уравнение равносильно исходному, имеет корни тогда и только тогда, когда выполняется двойное неравенство $-1 \leq \frac{8a - 5}{3} \leq 1$, решив которое получаем $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$.

О т в е т. Уравнение имеет корни, если $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$, и не имеет корней при остальных a ; $x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a - 5}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6 \sin x \cos y + 2 \cos x \sin y = -3, \\ 5 \sin x \cos y - 3 \cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Полагая $\sin x \cos y = u$, $\cos x \sin y = v$, получаем систему уравнений $\begin{cases} 6u + 2v = -3, \\ 5u - 3v = 1, \end{cases}$ откуда $u = -\frac{1}{4}$, $v = -\frac{3}{4}$.

Исходная система равносильна каждой из систем:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = -\frac{3}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(x + y) = -1, \\ \sin(x - y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

О т в е т. $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} + \pi n,$

$$y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} - \frac{\pi k}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—5).

1. $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 + \operatorname{ctg} 3x.$

О т в е т. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

$$2. \frac{\sin 3x - \cos x}{\cos 3x - \sin 5x} = 1.$$

$$\text{О т в е т. } \frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n, (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \frac{3 + \cos 4x - 8 \sin^4 x}{4(\sin x + \cos x)} = \frac{1}{\cos x}. \text{ О т в е т. } \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \frac{\sin 3x}{|\sin x|} + \frac{3 \sin x}{\sin 3x} = -2. \text{ О т в е т. } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \sqrt{\cos 4x - \sin 6x} = \sin x - \cos x.$$

$$\text{О т в е т. } \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{11\pi}{12} + 2\pi n, \frac{7\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $2 \cos 2x + 2a \sin x + a - 1 = 0$ имеет единственный корень на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. О т в е т. $a \leq -3, a = -2, a \geq -1$.

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9 \cos x \cos y - 5 \sin x \sin y = -6, \\ 7 \cos x \cos y - 3 \sin x \sin y = -4. \end{cases}$$

$$\text{О т в е т. } \left(\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi n + \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \pi n + \pi k\right), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

Решить уравнение (8—15).

$$8. \sin x + |\cos x| = \sin 4x + \cos 2x.$$

$$\text{О т в е т. } \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \sqrt{\frac{1}{2} + \cos x \cos 2x} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{О т в е т. } \frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \frac{8(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 2 \cos 4x + 5. \text{ О т в е т. } \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \sin 3x + |\sin x| = \sin 2x. \text{ О т в е т. } \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$12. \cos^2 2x + \cos^2 4x = \sin^2 x + \sin^2 5x.$$

$$\text{О т в е т. } \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$13. \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = \frac{8}{\sin 2x}. \text{ О т в е т. } \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$14. \operatorname{tg} x + 8|\operatorname{ctg} x| + \operatorname{ctg} 2x = 0. \text{ О т в е т. } -\arccos \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$15. \frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \frac{1}{\cos 3x \cos 4x} = 0.$$

$$\text{О т в е т. } \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

16. Найти все решения уравнения, удовлетворяющие заданному неравенству:

$$\cos 2x = 2 \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x, \quad \sin x \geq \cos x.$$

$$\text{О т в е т. } \pi \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

17. Найти все значения x из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, удовлетворяющие уравнению:

$$1) \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{\cos 6x} = \frac{\sqrt{3} \sin x + \cos x}{\sin 6x}. \quad \text{О т в е т. } -\frac{11\pi}{30}.$$

$$2) \frac{\sin 6x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos 6x}{\sin x + \cos x}. \quad \text{О т в е т. } -\frac{\pi}{20}, -\frac{9\pi}{20}.$$

18. Решить уравнение

$$\sin^2 4x + \cos^2 x = 2 \sin 4x \cos^4 x.$$

$$\text{О т в е т. } \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Решить систему уравнений (19—22).

$$19. \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{О т в е т. } \left(\pi n + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pi n + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2}\right), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$20. \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$\text{О т в е т. } \left(\frac{\pi}{4} + \pi n + \pi k; \pi n - \pi k\right), \left(\pi n + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi n - \pi k\right), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$21. \begin{cases} 5 \sin x = \sin y, \\ 3 \cos x + \cos y = 2. \end{cases}$$

$$\text{О т в е т. } (2\pi n; \pi + 2\pi k), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$22. \begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y. \end{cases}$$

$$\text{О т в е т. } (\pi n; 2\pi k), \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

**Материал для повторения курса алгебры
7—9 классов**

1

Вариант I

1. $x_1 = 1$, $x_2 = -2,5$. 2. $x = -5$. 3. $x_1 = 0,5$, $x_2 = -2$. 4. $x_{1,2} = \pm 1$.
5. $x_1 = -1,8$, $x_2 = 5$. 6. $x_1 = 0,5$, $x_2 = 2$. 7. 3. 8. (2; -1), (-1; 2).
9. (4,5; -2,5). 10. (1; 2), (3; 4). 11. (1; -2), (-2; 1). 12. 12 ч, 6 ч.
13. 3 км/ч. 14. Если $a \neq 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{a}$; если $a = 0$, то $x = 0$.
15. Если $a > -3$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{3+a}$; если $a = -3$, то $x = 0$; если
 $a < -3$, то корней нет. 16. $x_1 = \frac{1}{a-3}$, $x_2 = \frac{1}{a+3}$, если $a \neq \pm 3$;
 $x = -\frac{1}{6}$ при $a = -3$; $x = \frac{1}{6}$ при $a = 3$. 17. $p = -1$; $(x-1)(3x+2)$.
18. $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \pm 2$.

Вариант II

1. $x_1 = 1$, $x_2 = -0,4$. 2. $x = 7$. 3. $x_1 = 0,6$, $x_2 = -3$. 4. $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$.
5. $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 6$. 6. $x_1 = -1$, $x_2 = 11$. 7. 5. 8. (4; 1), (-1; -4).
9. (4; -1). 10. (1; 5), (-3; 1). 11. (1; 4), (-4; -1). 12. 10 дней,
15 дней. 13. 2 км/ч. 14. Если $a \neq 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{3}{a}$; если
 $a = 0$, то $x = 0$. 15. Если $a > 4$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{a-4}$; если $a = 4$, то
 $x = 0$; если $a < 4$, то корней нет. 16. $x_1 = \frac{1}{3-a}$, $x_2 = \frac{1}{3+a}$ при
 $a \neq \pm 3$; $x = \frac{1}{6}$ при $a = 3$ и при $a = -3$. 17. $q = 12$; $2(x-2)(2x-3)$.
18. $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm 3$.

2

Вариант I

1. $y = 3(x-2)^2 - 3$. 2. $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$. 6. См. рис. 46.
7. См. рис. 47. 8. Наименьшее значение $y = -5$ при $x = 1$. 9. Наи-
большее значение $y = 11$ при $x = -3$. 10. 1) $y = 6x + 8$; 2) $y = 6x - 8$,
 $y = -6x - 8$.

Вариант II

1. $y = 2(x+4)^2 + 3$. 2. $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$. 6. См. рис. 48.
7. См. рис. 49. 8. Наименьшее значение $y = -2$ при $x = 1$. 9. Наи-
большее значение $y = 11$ при $x = -2$. 10. $k = -2$, $b = -4$.

$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

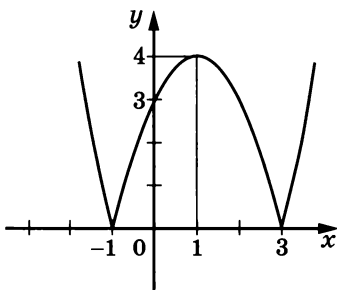


Рис. 46

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

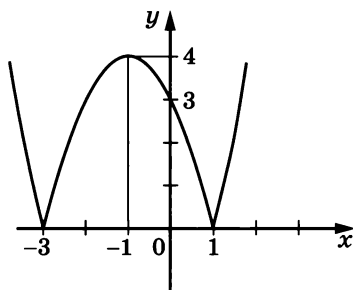


Рис. 48

$$y = x^2 - 2|x| - 3$$

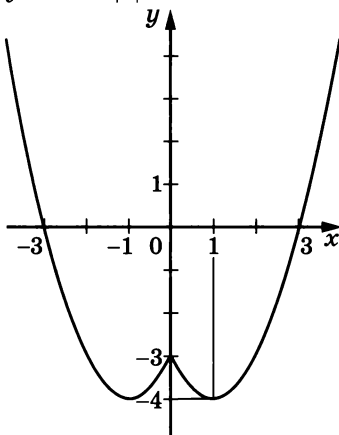


Рис. 47

$$y = x^2 + 2|x| - 3$$

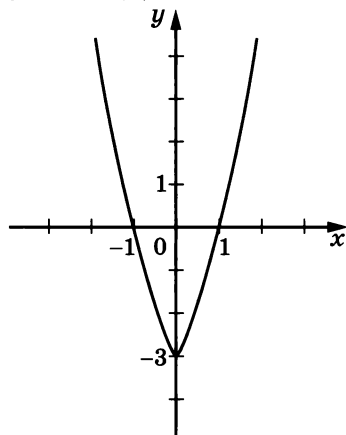


Рис. 49

3

Вариант I

1. Все действительные числа. 2. Нет решений. 3. Все действительные числа. 4. $x = \frac{5}{3}$. 5. $x < 2$, $x > 3$. 6. $0 < x < 3$. 7. $x \leq -1$, $x \geq \frac{4}{3}$.

Вариант II

1. Все действительные числа. 2. Нет решений. 3. Все действительные числа. 4. $x = \frac{1}{4}$. 5. $x < -5$, $x > 1$. 6. $-2 < x < 2$. 7. $x \leq -\frac{1}{3}$, $x \geq \frac{1}{2}$.

4

Вариант I

1. $-2 < x < 1$, $x > 3$. 2. $x < -5$, $-1,5 < x < 1$. 3. $-2 \leq x \leq 0$, $x \geq 2$. 4. $-3 \leq x \leq 2$, $x = 3$. 5. $x \leq -4$, $x = -2$, $x \geq 4$. 6. $x < -5$, $x = 1,5$. 7. $x < -1$, $3 < x < 7$, $7 < x < 9$. 8. $x \leq -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x \geq 9$. 9. $x < \frac{1}{5}$. 10. $-2 < x < -1$, $x > 2$.

Вариант II

1. $x < -4$, $-1 < x < 3$. 2. $-1 < x < \frac{1}{3}$, $x > 2$. 3. $x \leq -3$, $0 \leq x \leq 3$. 4. $x \leq -2$, $2 \leq x \leq 3$, $x \geq 4$. 5. $x = -3$, $-1 \leq x \leq 1$. 6. $x = -\frac{2}{3}$, $x > 6$. 7. $-2 < x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 4$. 8. $-2 \leq x \leq 1$, $x = 3$. 9. $x > -\frac{1}{6}$. 10. $x < -3$, $1 < x < 3$.

5

Вариант I

1. Нет корней. 2. $x = -\frac{1}{4}$. 3. $x = 2$. 4. $x_1 = -8$, $x_2 = \frac{2}{3}$. 5. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. 6. $x_1 = 0,2$, $x_2 = 3$. 7. $x = 4$. 8. $x \geq 2$. 9. Нет решений. 10. $-\frac{1}{3} < x < 1$. 11. $-\frac{1}{5} \leq x \leq 1$. 12. $x < 10$, $x > 18$. 13. $x \leq 2\frac{1}{3}$, $x \geq 5$. 14. $x < 0$, $x > 1$. 15. $0 < x < 5$. 16. $x < -8$.

Вариант II

1. Нет корней. 2. $x = -3\frac{1}{2}$. 3. $x = -3$. 4. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. 5. $x_1 = -4$, $x_2 = 3$. 6. $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 4$. 7. $x = 3$. 8. $x \leq -2$. 9. Нет решений. 10. $1 < x < 4$. 11. $1 \leq x \leq 2$. 12. $x < -3$, $x > 15$. 13. $x \leq 1$, $x \geq 7$. 14. $0 < x < 2$. 15. $x < 0$, $x > 5$. 16. $x < -8$, $x > -4$.

Главы I—VI

§ 1

Вариант I

1. $\frac{5}{16}$. 2. $\frac{7}{9}$. 6. $1\frac{4}{9}$. 7. $\frac{13}{99}$. 8. $-3\frac{8}{45}$. 9. $\frac{401}{3300}$.

Вариант II

1. $1\frac{9}{40}$. 2. $\frac{14}{9}$. 6. $2\frac{8}{9}$. 7. $-\frac{15}{99}$. 8. $4\frac{4}{15}$. 9. $\frac{749}{4950}$.

§ 2

Вариант I

1. π ; $\sqrt{2}$. 2. $[5; 6]$. 3. $[4; 5]$. 4. См. рис. 50. 5. Рациональным. 6. Рациональным. 7. Иррациональным. 8. Иррациональным. 9. $\sqrt{8+2\sqrt{15}} > \sqrt{13-2\sqrt{30}}$.

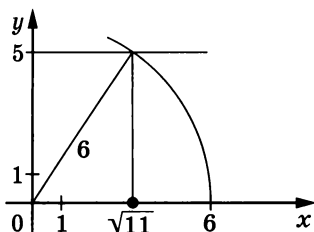


Рис. 50

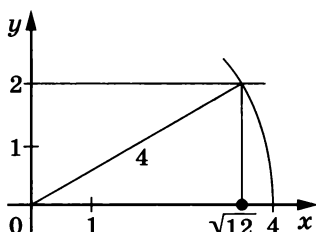


Рис. 51

Вариант II

1. $\sqrt{3}$; $\frac{1}{\pi}$. 2. $[3; 4]$. 3. $[7; 8]$. 4. См. рис. 51. 5. Рациональным. 6. Рациональным. 7. Иррациональным. 8. Рациональным. 9. $\sqrt{7+2\sqrt{10}} > \sqrt{22-2\sqrt{45}}$.

§ 3

Вариант I

1. Является. 2. Является. 3. $\frac{1}{6}$. 4. $4\frac{1}{2}$. 5. 9. 6. $1\frac{5}{9}$. 7. $\frac{11}{900}$. 8. $4\frac{1223}{9900}$.

Вариант II

1. Является. 2. Является. 3. $\frac{25}{36}$. 4. $1\frac{1}{48}$. 5. $1\frac{1}{24}$. 6. $2\frac{8}{9}$. 7. $3\frac{7}{300}$. 8. $5\frac{2107}{9900}$.

§ 4

Вариант I

1. 5. 2. 0,1. 3. -2. 4. 1,5. 5. 2. 6. 6. 7. 5. 8. $\frac{1}{6}$. 9. 0,4. 10. 432. 11. 7. 12. 3. 13. $x \in \mathbf{R}$. 14. $x \geq -2$. 15. $x \leq -1, x \geq 4$. 16. $2 < x \leq 3$. 17. y . 18. $|y|$. 19. $2 + x$. 20. $|x - 5|$. 21. $8 - x$. 22. $-2x - 5$. 23. $2x + 1$. 24. $5x - 2$. 25. Нет. 26. Да. 27. Да. 28. Нет. 29. $\sqrt[4]{a}$. 30. $\sqrt[6]{a} - 1$. 31. $\frac{1}{\sqrt[4]{a} - 1}$. 32. $-1 - \sqrt[6]{a}$. 33. $\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a} + 1$. 34. $\frac{1}{\sqrt[6]{a} + 1}$. 35. $\frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}$. 36. $\frac{2 - \sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}}$. 37. $\frac{\sqrt[4]{a^3 b}}{\sqrt{a - \sqrt{b}}}$. 38. $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$. 39. $\sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{3b}$. 40. $\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{2b^2}$. 41. У к а з а н и е. Возвести в квадрат обе части. 42. $\frac{3(2 + \sqrt{6} - \sqrt{10})}{4}$.

Вариант II

1. 0,4. 2. 3. 3. -2. 4. $1\frac{1}{5}$. 5. 5. 6. 6. 7. 0,5. 8. 3. 9. $\frac{2}{3}$. 10. 162. 11. 1. 12. 4. 13. $x \in \mathbf{R}$. 14. $x \geq -3$. 15. $2 \leq x \leq 3$. 16. $-6 < x \leq 6$. 17. y . 18. $|y|$. 19. $3 - x$. 20. $|x + 7|$. 21. $11 + x$. 22. $1 + 3x$. 23. -6.

24. $5 - 2x$. 25. Нет. 26. Да. 27. Да. 28. Нет. 29. $\sqrt[6]{a}$. 30. $1 - \sqrt[4]{a}$.
 31. $\frac{1}{1 + \sqrt[4]{a}}$. 32. $1 - \sqrt[6]{a}$. 33. $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{a} + 1}$. 34. $\sqrt[6]{a} - 1$. 35. $\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt[4]{a}}$.
 36. $\frac{2 - \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$. 37. $\frac{\sqrt[6]{ab^5}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$. 38. $\frac{1}{\sqrt[6]{b}}$. 39. $\sqrt[3]{5a} + \sqrt[3]{4b}$. 40. $\sqrt{2b} - \sqrt{a}$.
 41. У к а з а н и е. Возвести в квадрат обе части. 42. $\frac{7(2 + \sqrt{10} + \sqrt{14})}{2}$.

§ 5

Вариант I

1. 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$. 2. 16. 3. $\frac{64}{121}$. 4. $\frac{1}{4}$. 5. -6. 6. 8. 7. 5.
 8. 2. 9. $a^{\frac{3}{2}}$. 10. $a^{\frac{19}{24}}$. 11. a^4 . 12. $a^{\frac{1}{3}}$. 13. $a^{\frac{1}{6}}$. 14. a^5b . 15. $9a^{\frac{5}{9}}b^{\frac{3}{2}}$.
 16. $a \geq 0$. 17. $a \geq 0$. 18. $a \geq 1$. 19. $a > -2$. 20. $7,1^{-2,5} < 7^{-2\frac{1}{3}}$.
 21. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$. 22. $(1,03)^{-5} < 1$. 23. $x = \frac{1}{3}$. 24. $x = -\frac{2}{15}$. 25. 32,4.
 26. $\sqrt[5]{3} < \sqrt[5]{6}$. 27. $(0,35)^{\frac{3}{7}} < (0,356)^{\frac{3}{7}}$. 28. $35^{-1,7} > 36^{-1,7}$. 29. $4a - b^{-\frac{1}{2}}$.
 30. $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. 31. $a^{\frac{1}{2}} - 1$. 32. $a^{\frac{1}{2}}$. 33. 56. 34. $3^{\sqrt{2}} > 1$. 35. $(0,7)^\pi < 1$.
 36. $(2,71)^{\sqrt{3}} > (2,701)^{\sqrt{3}}$. 37. $(0,44)^{-\pi} > (0,(4))^{-\pi}$. 38. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.
 39. $2^{-\sqrt{5}} < 2^{-\sqrt{3}}$. 40. a^2 . 41. $a^{\sqrt{2}+3}$. 42. a^2 . 43. $a^3\pi$. 44. $3\sqrt{b}$. 45. $a + b$.

Вариант II

1. 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$. 2. $-\frac{8}{27}$. 3. $-\frac{27}{343}$. 4. $\frac{1}{125}$. 5. 12.
 6. $\frac{1}{3}$. 7. $\frac{1}{144}$. 8. $-\frac{1}{12}$. 9. $a^{\frac{3}{2}}$. 10. $a^{\frac{13}{8}}$. 11. a^6 . 12. $a^{\frac{4}{15}}$. 13. $a^{\frac{9}{9}}$.
 14. $\frac{b^2}{a^6}$. 15. $3^{\frac{5}{6}}a^{\frac{14}{3}}b^{\frac{10}{3}}$. 16. $a \geq 0$. 17. $a \geq 0$. 18. $a \geq -3$. 19. $a < 1$.
 20. $(0,2)^{-\frac{1}{3}} > 0,2^{-0,3}$. 21. $9,7^{\frac{5}{6}} < 9,7^{\frac{6}{7}}$. 22. $1 < (0,283)^{-8}$. 23. $x = -\frac{3}{8}$.
 24. $x = \frac{2}{15}$. 25. 17,5. 26. $\sqrt[7]{2} > \sqrt[7]{0,1}$. 27. $(1,02)^{0,4} < (1,021)^{0,4}$.
 28. $18^{-1,8} > 19^{-1,8}$. 29. $a^{\frac{4}{3}} - 9b^{-2}$. 30. $2\sqrt[3]{ab}$. 31. $\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$.
 32. 2. 33. 3. 34. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$. 35. $(1,07)^\pi > 1$. 36. $(0,37)^{\sqrt{3}} > (0,307)^{\sqrt{3}}$.
 37. $(0,(3))^{-\sqrt{5}} < (0,3)^{-\sqrt{5}}$. 38. $(5,1)^{\sqrt{5}} < (5,1)^{\sqrt{7}}$. 39. $(0,3)^{-\sqrt{2}} < (0,3)^{-\sqrt{5}}$.
 40. a^3 . 41. $a^{\sqrt{3}+2}$. 42. a^{-1} . 43. $a^{\sqrt{5}-2}$. 44. $\frac{1}{1-x^2}$. 45. $\frac{1}{n}$.

Вариант I

1. См. рис. 52. 2. См. рис. 53. 3. См. рис. 54. 4. См. рис. 55.
 5. См. рис. 56. 6. См. рис. 57. 7. $x \in \mathbf{R}, y \geq 0$. 8. $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$.
 9. $x \neq 0, y \neq 0$. 10. $x \neq 0, y > 0$. 11. $x \geq 0, y \geq 0$. 12. $x > 0, y > 0$.
 13. $x \geq 0, y \geq 0$. 14. $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$. 15. $x \geq 0, y \geq 0$. 16. Возрастает.
 17. Возрастает. 18. Убывает. 19. $3,1^{8,7} < 5,2^{8,7}$. 20. $0,48^{0,1} < 0,75^{0,1}$.
 21. $\pi^{-3} > 3,41^{-3}$. 22. $x \geq 2$. 23. $x \geq -2$. 24. $x \leq 3$. 25. $x \in \mathbf{R}$.
 26. $x \neq 0, x \neq \pm 1$. 27. $x \neq 0, x \neq 2, x \neq 1$. 28. $x \in \mathbf{R}$. 29. $x \leq -2, x \geq 2$.
 30. $-2 < x < 0, x > 3$. 31. $x < -2, x \geq 1$. 32. $y \geq 0$. 33. $y \neq 0$.
 34. $y \geq 3$. 35. $y \in \mathbf{R}$. 36. $y \geq 0$. 37. $y = 5x^{-2}, y = \frac{1}{7}x^8$. 38. Возрастает.
 39. Убывает. 40. Убывает. 41. $x \in \mathbf{R}, y \geq 1; y > 0$ при $x \in \mathbf{R}$; возрастает при $x \geq 0$; убывает при $x \leq 0$ (рис. 58). 42. $x \in \mathbf{R}; y \in \mathbf{R}; y > 0$ при $x < 1; y < 0$ при $x > 1$; убывает при $x \in \mathbf{R}$ (рис. 59).

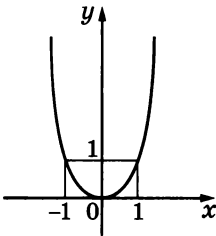


Рис. 52

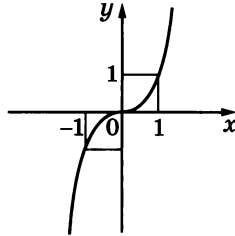


Рис. 53

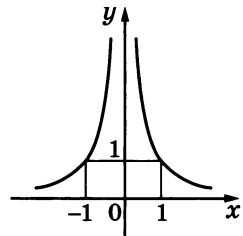


Рис. 54

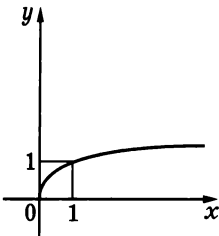


Рис. 55

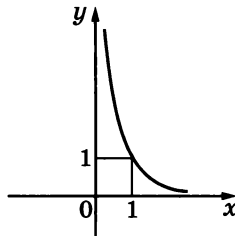


Рис. 56

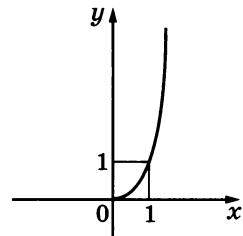


Рис. 57

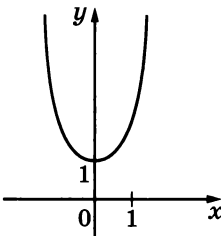


Рис. 58

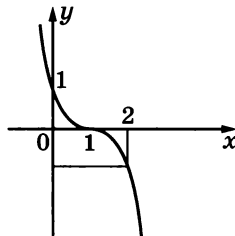


Рис. 59

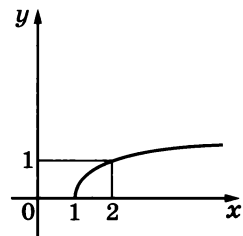


Рис. 60

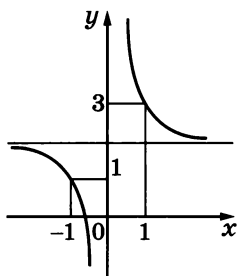


Рис. 61

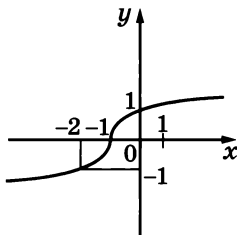


Рис. 62

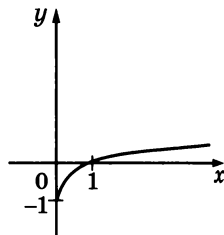


Рис. 63

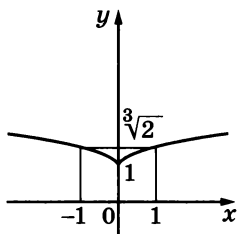


Рис. 64

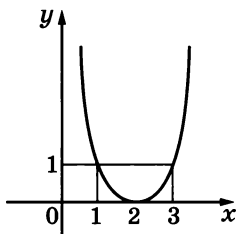


Рис. 65

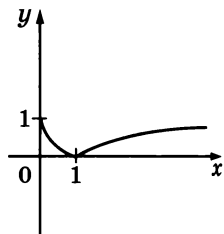


Рис. 66

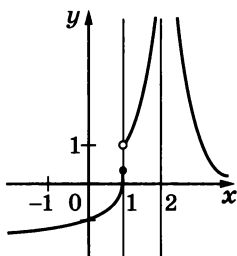


Рис. 67

43. $x \geq 1$; $y \geq 0$; $y > 0$ при $x > 1$; возрастает при $x \geq 1$ (рис. 60). 44. $x \neq 0$, $y \neq 2$, $y > 0$ при $x < -\sqrt[5]{0,5}$, $x > 0$; $y < 0$ при $-\sqrt[5]{0,5} < x < 0$; убывает при $x < 0$, $x > 0$ (рис. 61). 45. $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; $y > 0$ при $x > -1$; $y < 0$ при $x < -1$; возрастает при $x \in \mathbb{R}$ (рис. 62). 46. $x \geq 0$; $y \geq -1$; $y > 0$ при $x > 1$; $y < 0$ при $0 \leq x < 1$; возрастает при $x \geq 0$ (рис. 63). 47. При $a = 0$ один корень, при $a > 0$ два корня, при $a < 0$ нет корней. 48. При $a = 2$ один корень, при $a < 2$ два корня, при $a > 2$ нет корней. 49. При $a > 1$

два корня, при $a \leq 1$ нет корней. 50. $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. 51. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. 52. См. рис. 64. 53. См. рис. 65. 54. См. рис. 66. 55. $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{2}{15}$. 56. $y_1 = 8$, $y_2 = \frac{3}{2}$. 57. См. рис. 67.

Вариант II

1. См. рис. 68. 2. См. рис. 69. 3. См. рис. 70. 4. См. рис. 71. 5. См. рис. 72. 6. См. рис. 73. 7. $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. 8. $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. 9. $x \neq 0$, $y \neq 0$. 10. $x \neq 0$, $y > 0$. 11. $x \geq 0$, $y \geq 0$. 12. $x > 0$, $y > 0$. 13. $x \geq 0$, $y \geq 0$. 14. $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. 15. $x \geq 0$, $y \geq 0$. 16. Возрастает. 17. Возрастает. 18. Убывает. 19. $1,3^{5,1} < 2,7^{5,1}$. 20. $8,5^{0,01} < 10,5^{0,01}$. 21. $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-0,3} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-0,3}$. 22. $x \geq 5$. 23. $x \geq -3$. 24. $x \geq 2$.

25. $x \in \mathbf{R}$. 26. $x \neq 0, x \neq \pm 1$. 27. $x \neq 0, x \neq -2, x \neq -1$. 28. $x \in \mathbf{R}$.
 29. $-3 \leq x \leq 3$. 30. $-4 < x < 0, x > 3$. 31. $x \leq -3, x > 4$. 32. $y \geq 0$.
 33. $y \neq 0$. 34. $y \geq 5$. 35. $y \in \mathbf{R}$. 36. $y \geq 0$. 37. $y = 16x^{-3}, y = x^{-5}$.
 38. Возрастает. 39. Убывает. 40. Убывает. 41. $x \in \mathbf{R}; y \geq 0; y > 0$

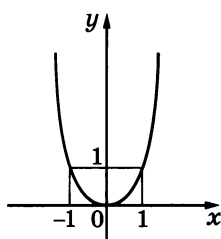


Рис. 68

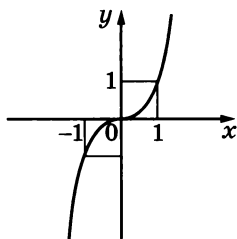


Рис. 69

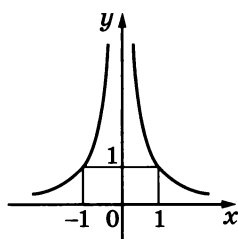


Рис. 70

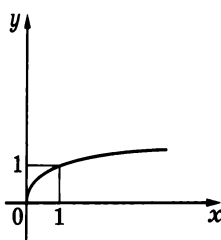


Рис. 71

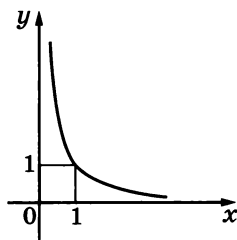


Рис. 72

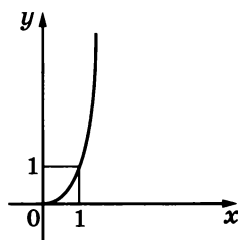


Рис. 73

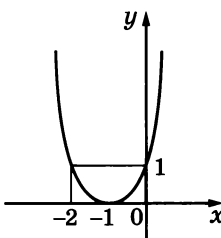


Рис. 74

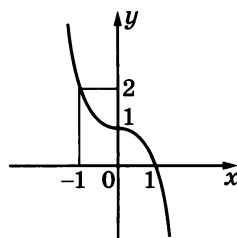


Рис. 75

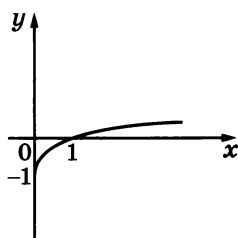


Рис. 76

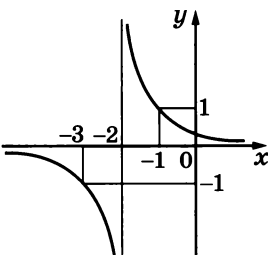


Рис. 77

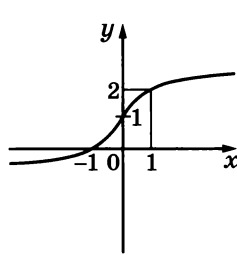


Рис. 78

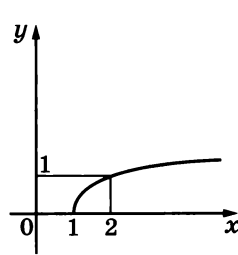


Рис. 79

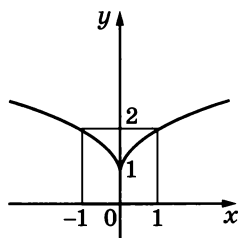


Рис. 80

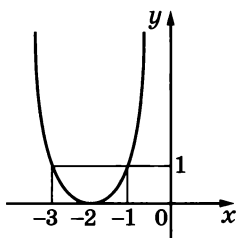


Рис. 81

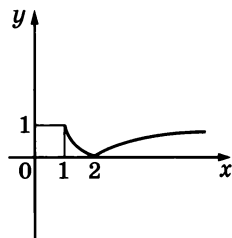


Рис. 82

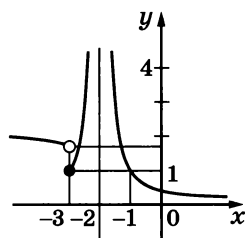


Рис. 83

при $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = -1$; возрастает при $x \geq -1$, убывает при $x \leq -1$ (рис. 74). 42. $x \in \mathbf{R}$; $y \in \mathbf{R}$; $y > 0$ при $x < 1$; $y < 0$ при $x > 1$; убывает при $x \in \mathbf{R}$ (рис. 75). 43. $x \geq 0$; $y \geq -1$; $y > 0$ при $x > 1$; $y < 0$ при $0 \leq x < 1$; возрастает при $x \geq 0$ (рис. 76). 44. $x \neq -2$; $y \neq 0$; $y > 0$ при $x > -2$; $y < 0$ при $x < -2$; убывает при $x < -2$, $x > -2$ (рис. 77). 45. $x \in \mathbf{R}$; $y \in \mathbf{R}$; $y > 0$ при $x > -1$; $y < 0$ при $x < -1$; возрастает при $x \in \mathbf{R}$ (рис. 78). 46. $x \geq 1$; $y \geq 0$; $y > 0$ при $x > 1$; возрастает при $x \geq 1$ (рис. 79).

47. При $a = 0$ один корень, при $a < 0$ нет корней, при $a > 0$ два корня. 48. При $a = 2$ один корень, при $a > 2$ два корня, при $a < 2$ нет корней. 49. При $a > -2$ два корня, при $a \leq -2$ нет корней. 50. $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$. 51. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. 52. См. рис. 80. 53. См. рис. 81. 54. См. рис. 82. 55. $y_1 = 2$, $y_2 = 2$. 56. $y_1 = 4$, $y_2 = 2$. 57. См. рис. 83.

§ 7

Вариант I

1. $y = \frac{2-x}{3}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. 2. $y = 2 - \frac{5}{x}$, $x \neq 0$, $y \neq 2$. 3. $y = \sqrt[3]{2-x}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. 4. $y = \frac{x^3 + 7}{2}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. 5. См. рис. 84. 6. См. рис. 85. 7. См. рис. 86.

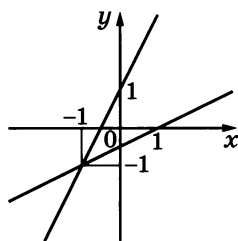


Рис. 84

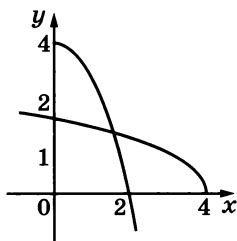


Рис. 85

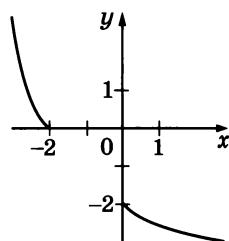


Рис. 86

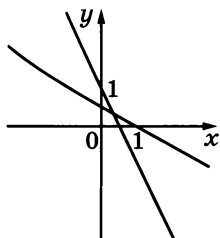


Рис. 87

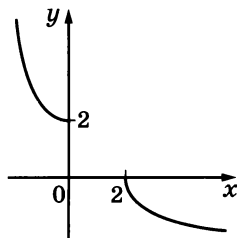


Рис. 88

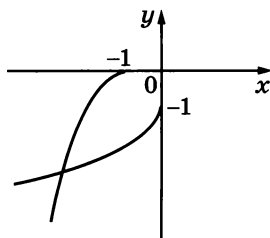


Рис. 89

Вариант II

1. $y = \frac{x+3}{2}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. 2. $y = \frac{7}{x} + 4$, $x \neq 0$, $y \neq 4$. 3. $y = \sqrt[5]{3-x}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. 4. $y = \frac{x^5-1}{3}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. 5. См. рис. 87. 6. См. рис. 88. 7. См. рис. 89.

§ 8

Вариант I

1. Второе уравнение — следствие первого. 2. Первое уравнение — следствие второго. 3. Первое уравнение — следствие второго. 13. Равносильны. 14. Не равносильны. 15. Не равносильны. 16. Не равносильны. 17. Не равносильны. 18. 0, 1, 2, 3.

Вариант II

1. Второе уравнение — следствие первого. 2. Первое уравнение — следствие второго. 3. Первое уравнение — следствие второго. 13. Равносильны. 14. Не равносильны. 15. Не равносильны. 16. Равносильны. 17. Не равносильны. 18. 0, 1, 2.

§ 9

Вариант I

1. $x = 1$. 2. $x = 0$. 3. $x = 5$. 4. $x_1 = -4$, $x_2 = 3$. 5. $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. 6. $x = -4$. 7. $x = 3$. 8. $x = 10$. 9. $x = -1$. 10. $x = \frac{2}{3}$. 11. $x = 2$. 12. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. 13. $x = a^2$ при $a \geq 0$, нет корней при $a < 0$. 14. $x = a^2 + 1$ при $a \geq 0$, нет корней при $a < 0$. 15. $x = (1+a)^2$ при $a \geq -1$, нет корней при $a < -1$. 16. Один корень. 17. Два корня. 18. Один корень. 19. $x = -1$. 20. $x = 1$. 21. $x_1 = -9$, $x_2 = 4$.

Вариант II

1. $x = 5$. 2. $x = 0$. 3. $x = 6$. 4. $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. 5. $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. 6. $x = -3$. 7. $x = 18$. 8. $x = 8$. 9. $x = 20$. 10. $x = \frac{3}{4}$. 11. $x = -2$. 12. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. 13. $x = a^2$ при $a \leq 0$, нет корней при $a > 0$.

14. $x = a^2 - 2$ при $a \geq 0$, нет корней при $a < 0$. 15. $x = (a - 3)^2$ при $a \geq 3$, нет корней при $a < 3$. 16. Один корень. 17. Два корня. 18. Один корень. 19. $x = -1$. 20. $x = -1$. 21. $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

§ 10

Вариант I

1. Нет решений. 2. $2 \leq x < 27$. 3. $-23 \leq x \leq 1,5$. 4. $x \geq 7$.
5. $x < -6$. 6. $x \geq -0,5$. 7. $x \leq 14$. 8. $x > 1$. 9. $x = 2$, $x \geq 3$.
10. $-8 \leq x < 1$. 11. $2 < x < 3$. 12. $x \leq -2$, $x \geq 0$. 13. Нет решений.
14. $1 < x \leq 4$. 15. $x \geq 4$. 16. $x = -1$. 17. $x > \frac{48}{13}$. 18. $x = 2$.

Вариант II

1. Нет решений. 2. $3 \leq x < 7$. 3. $-12 \leq x \leq 0,8$. 4. $x \geq 11$.
5. $x < -5$. 6. $x \leq 1,2$. 7. $x \geq 6$. 8. $x > 7$. 9. $x = -4$, $x \geq -3$.
10. $3 \leq x < 7$. 11. $-4 < x < -3$. 12. $0 \leq x \leq 4$. 13. Нет решений.
14. $x \geq -1$. 15. $2 < x \leq 3$. 16. $x = -3$. 17. $x \geq 4$. 18. $x = 3$.

§ 11

Вариант I

1. 1) $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$; 2) $x = 0$, $y = 3$; 3) положительные значения при $-1 < x < 1$, $3 < x \leq 4$, отрицательные значения при $-2 \leq x < -1$, $1 < x < 3$; 4) $-2 \leq x \leq 0$, $2 \leq x \leq 4$ — промежутки возрастания, $0 \leq x \leq 2$ — промежуток убывания. 2. Возрастающая. 3. Возрастающая. 4. Убывающая. 5. $\approx 1,7$. 6. $x \approx -2,3$.
7. $5,6^{-4} > 5,6^{-5}$. 8. $\left(1\frac{1}{7}\right)^{-8} < 1$. 9. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} > \left(\frac{3}{2}\right)^2$. 10. $y = 3^x$.

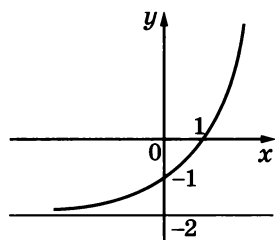


Рис. 90

11. $y = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x$. 12. $y = 5^x$. 13. $y = (3 - 2\sqrt{2})^x$.

14. $x = -1$, $y = \frac{1}{4}$. 15. $x = 1$. 16. См. рис. 90.

17. См. рис. 91. 18. $x \geq 1$. 19. $-2 < x < 2$.

20. $y > 0$. 21. $y > 2$. 22. Два корня.

Вариант II

1. 1) $x = 1$, $x = 2$; 2) $x = 0$, $y = -1$; 3) положительные значения при $1 < x < 2$,

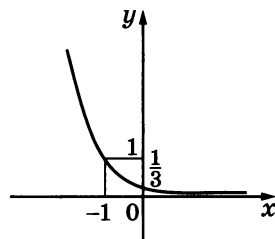


Рис. 91

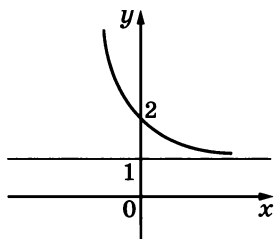


Рис. 92

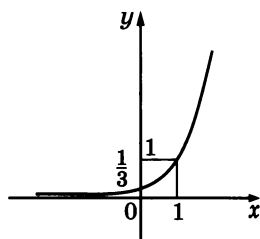


Рис. 93

отрицательные значения при $-1 \leq x < 1$, $2 < x \leq 3$; 4) $-1 \leq x \leq 1,5$, $2,5 \leq x \leq 3$ — промежутки возрастания, $1,5 \leq x \leq 2,5$ — промежутки убывания. 2. Убывающая. 3. Убывающая. 4. Возрастающая. 5. $\approx 0,4$. 6. $x \approx -1,8$. 7. $0,9^{-6} > 0,9^{-4}$. 8. $1,2^{-4} < 1$. 9. $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} < \left(\frac{6}{5}\right)^3$. 10. $y = 2^x$. 11. $y = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x$. 12. $y = \left(\frac{4}{25}\right)^x$. 13. $y = (3 + 2\sqrt{2})^x$. 14. $x = -2$, $y = \frac{1}{9}$. 15. $x = -1$. 16. См. рис. 92. 17. См. рис. 93. 18. $x \leq 1$. 19. $x < -3$, $x > 3$. 20. $y > 0$. 21. $y > -3$. 22. Два корня.

§ 12

Вариант I

1. 1. 2. $x = 1,5$. 3. $x = -\frac{2}{9}$. 4. $x = -1,5$. 5. $x = 0$. 6. $x = 4$. 7. $x = 0$. 8. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. 9. $x = \pm 2\sqrt{2}$. 10. $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. 11. $x = 2$. 12. $x_1 = -1$, $x_2 = 7$.

Вариант II

1. -1. 2. $x = 2\frac{1}{3}$. 3. $x = 1,8$. 4. $x = -2$. 5. $x = 0$. 6. $x = 3$. 7. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. 8. Нет корней. 9. $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. 10. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. 11. $x = 2$. 12. $x_1 = -2\frac{1}{4}$, $x_2 = -1\frac{3}{4}$.

§ 13

Вариант I

1. $x < -1$. 2. $x \leq -\frac{1}{4}$. 3. $x \leq -3$, $x \geq 3$. 4. $x < 3$. 5. $0 < x < \frac{1}{3}$. 6. $x = 0$, $x = 1$. 7. $x = -1$. 8. $x > -1$. 9. $x \leq 2$.

Вариант II

1. $x < -1$. 2. $x \leq -3$. 3. $-2 \leq x \leq 2$. 4. $x < 2$. 5. $x < -\frac{1}{3}$, $x > 0$. 6. $x = -1$. 7. $x = -1$. 8. $x > -1$. 9. $x \leq 1$.

§ 14

Вариант I

1. $x = 3$, $y = 2$. 2. $x = 1$, $y = 2$. 3. $x = -1$. 4. $x = -4$, $y = -3$.

Вариант II

1. $x = -3$, $y = -2$. 2. $x = 1$, $y = 3$. 3. $x = -3$. 4. $x = 2$, $y = -4$.

§ 15

Вариант I

1. 9. 2. 256. 3. 48. 4. $\frac{1}{27}$. 5. 1. 6. 2. 7. -5. 8. $\frac{2}{3}$. 9. $-\frac{3}{2}$. 10. 6. 11. -2. 12. -6. 13. 2. 14. $-\frac{2}{3}$. 15. $x < 4$. 16. $x < \frac{3}{2}$. 17. $x > 1$.

18. $x < -7$, $x > 5$. 19. $2\frac{1}{3} < x < 4$. 20. $x < -4$, $x > 4$. 21. x — любое действительное число. 22. $x < 1$, $x > 7$. 23. Таких значений x не существует. 24. $0 < x < 1$; $1 < x < 1\frac{2}{3}$. 25. $x > 3$. 26. $x = 32$. 27. $x = \sqrt[4]{3}$. 28. $x = 2$. 29. $x = 11$. 30. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$. 31. $x = 3$. 32. $x = \frac{1}{2}$. 33. $x = 2$. 34. $x = 625$. 35. $x = \sqrt{5}$. 36. $x = \frac{1}{27}$. 37. $x = \log_3 4$. 38. $x = \frac{\log_8 5 + 1}{2}$. 39. $x = 1$. 40. $x = \log_3 2$. 41. При $a \leq 0$ корней нет; $x = \log_7 a$ при $a > 0$. 42. $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. 43. При $a < 0$ и $a = 1$ корней нет; при $a > 0$, $a \neq 1$, $x = a^{-2}$. 44. Корней нет (так как $2a - a^2 - 1 \leq 0$ при любом a).

Вариант II

1. 18. 2. 8000. 3. 147. 4. 225. 5. 1. 6. 2. 7. -3. 8. $-\frac{2}{3}$. 9. $-\frac{3}{2}$. 10. 9. 11. -2. 12. -4. 13. 1. 14. 2. 15. $x < 7$. 16. $x < \frac{2}{3}$. 17. $x < 2$. 18. $x < -3$, $x > 4$. 19. $-1 < x < 1,6$. 20. $x < -\frac{1}{2}$, $x > \frac{1}{2}$. 21. x — любое действительное число. 22. $x < 3$, $x > 5$. 23. Таких значений x не существует. 24. $0 < x < 1$, $1 < x < 1\frac{3}{4}$. 25. $2 < x < 3$, $x > 3$. 26. $x = 81$. 27. $x = \sqrt[3]{2}$. 28. $x = \frac{1}{2}$. 29. $x = 29$. 30. $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. 31. $x = 2$. 32. $x = \frac{1}{3}$. 33. $x = 2$. 34. $x = 512$. 35. $x = \sqrt{7}$. 36. $x = \frac{1}{49}$. 37. $x = \log_5 3$. 38. $x = 1 - \log_9 4$. 39. $x = 1$. 40. $x = \log_4 3$. 41. При $m \leq 0$ корней нет; $x = \log_{0,8} m$ при $m > 0$. 42. $x = 3,2^a$. 43. При $a < 0$ и $a = 1$ корней нет; при $a > 0$, $a \neq 1$ $x = a^{-10}$. 44. Корней нет (так как $4a - a^2 - 4 \leq 0$ при любом a).

§ 16

Вариант I

1. 1. 2. -2. 3. 3. 4. 3. 5. 20. 6. $\frac{2}{3}$. 7. -1. 8. 4. 9. -2. 10. 1) 17; 2) 42. 11. 1) 10; 2) 0,5. 12. $\log_2 5^{-3}$, $\log_2 (-5)^2$, $2^{\log_2 \frac{1}{2}}$. 13. 1) $\log_{10} 10$; 2) $\log_{10} 100000$; 3) $\log_{10} \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Вариант II

1. 1. 2. -1. 3. 2. 4. -5. 5. 21. 6. $\frac{2}{5}$. 7. 1. 8. 1. 9. 2. 10. 1) 11; 2) 36. 11. 1) 15; 2) -1. 12. $\log_3 (-2)^2$, $\log_3 2^{-3}$, $3^{\log_3 \frac{1}{3}}$. 13. 1) $\log_{12} 1$; 2) $\log_{12} \frac{1}{144}$; 3) $\log_{12} \sqrt[3]{12}$.

§ 17

Вариант I

1. $\frac{1}{4} \log_2 3$. 2. $\frac{3}{2} \log_3 5$. 3. 0,43. 4. 0,77. 5. -0,86. 6. 4,25.
 7. $\frac{1+2m}{2}$. 8. $\frac{1}{3}$. 9. $\frac{2}{3}$. 10. $\frac{1}{9}$. 11. $\frac{2}{9}$. 12. 1,30. 13. $\frac{3}{2}$. 14. 2. 15. $x = 200$.
 16. $x = 25$. 17. $x = 64$. 18. $x = 125$. 19. $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$. 20. $x_1 = 8$,
 $x_2 = 0,5$. 21. $x = 3$. 22. $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 4$. 23. $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. 24. При-
 мерно через 6,1 года.

Вариант II

1. $\frac{1}{3} \log_3 5$. 2. $\frac{5}{2} \log_2 7$. 3. 0,68. 4. 0,73. 5. -4,64. 6. 4,21.
 7. $\frac{1+m}{3}$. 8. 2. 9. 6. 10. 1. 11. 3. 12. 0,884. 13. $\frac{3}{2}$. 14. 1. 15. $x = 9$.
 16. $x = 343$. 17. $x = 81$. 18. $x = 27$. 19. $x_1 = 8$, $x_2 = \frac{1}{8}$. 20. $x_1 = 25$,
 $x_2 = 0,2$. 21. $x = \frac{1}{6}$. 22. $x_1 = 0,25$, $x_2 = 2$. 23. $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 27$.
 24. Примерно через 3,27 дня.

§ 18

Вариант I

1. -1,7; -0,7; 1,6; 2,8. 2. $\log_2 5,5 < \log_2 7,5$; $\log_2 0,8 > \log_2 0,2$.
 3. $\log_2 5 < 2,8$. 4. $\log_2 0,7 < 0$; $\log_2 1,3 > 0$. 5. Убывающая. 6. Воз-
 растающая. 7. $\log_9 \frac{4}{5} < \log_9 \frac{6}{5}$. 8. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{3}$. 9. $\log_{0,9} \frac{4}{5} >$
 $> \log_{0,9} \frac{5}{6}$. 10. $\log_3 8,1 < 2$. 11. $3 > \log_{\frac{1}{3}} 0,05$. 12. $x < 1$. 13. $x > 1$.
 14. $x < 1$. 15. $x > 1$. 16. $x < 1$. 17. $x < 1$. 18. $x > 1$. 19. $x > 1$.
 20. $x = 4$. 21. $x = 0$. 22. $x = 10$. 23. $x = 1$. 24. $x > 3$. 25. $0 < x \leq 6$.
 26. $0 < x < 2$. 27. $x > e$. 28. $x = 2$. 29. $x = 3$. 30. $(2^n; -n)$, где $n \in \mathbb{N}$,
 $n = 0$. 31. $(1; 0)$.

Вариант II

1. 1,1; 0,5; -1,5; -1,9. 2. $\log_{\frac{1}{3}} 6,5 < \log_{\frac{1}{3}} 4$; $\log_{\frac{1}{3}} 0,3 > \log_{\frac{1}{3}} 0,9$.
 3. $\log_{\frac{1}{3}} 5 > -1,8$. 4. $\log_{\frac{1}{3}} 0,6 > 0$; $\log_{\frac{1}{3}} 2,1 < 0$. 5. Возрастающая.
 6. Убывающая. 7. $\log_7 \frac{8}{7} > \log_7 \frac{7}{8}$. 8. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{4}{3} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$. 9. $\log_{0,7} \frac{4}{5} <$
 $< \log_{0,7} \frac{3}{4}$. 10. $\log_3 31 > 3$. 11. $2 < \log_{\frac{1}{7}} 0,02$. 12. $x < 1$. 13. $x > 1$.
 14. $x > 1$. 15. $x < 1$. 16. $x > 1$. 17. $x > 1$. 18. $x < 1$. 19. $x < 1$.
 20. $x = -3$. 21. $x = -2$. 22. $x = 4$. 23. $x = 25$. 24. $0 < x \leq 4$. 25. $x > 5$.
 26. $0 < x < 0,5$. 27. $x \geq \frac{1}{\pi}$. 28. $x = 3$. 29. $x = 4$. 30. $(2^n; -n)$, где
 $n \in \mathbb{N}$, $n = 0$. 31. $(1; 0)$.

§ 19

Вариант I

1. Второе уравнение — следствие первого. 6. Не равносильны. 7. Равносильны. 8. $x = 2$. 9. $x = 4$. 10. Корней нет. 11. $x = 7$. 12. $x = 3$. 13. $x = 2$. 14. $x = 2$. 15. $x = 4$. 16. $x = 2$. 17. $x = 10$. 18. $x = 9$. 19. $x = 9$. 20. $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. 21. $x_1 = 2$, $x_2 = 0,25$. 22. $x_1 = -7$, $x_2 = 0,5$. 23. $x = 1$. 24. $x_1 = 4\sqrt{2}$, $x_2 = 0,5$. 25. $x = 9$, $y = 1$. 26. $x = 4$, $y = 2$. 27. (8; 8). 28. (3; 1). 29. $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $(\log_3 2; \log_2 3)$. 30. $(\log_7 3; \log_3 7)$.

Вариант II

1. Второе уравнение — следствие первого. 6. Равносильны. 7. Не равносильны. 8. $x = \sqrt{2}$. 9. $x = -4$. 10. Корней нет. 11. Корней нет. 12. $x = 5$. 13. $x = 3$. 14. $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. 15. Корней нет. 16. $x = 5$. 17. $x = 3$. 18. $x = 25$. 19. $x = 4,3$. 20. $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. 21. $x_1 = 125$, $x_2 = 0,04$. 22. $x_1 = 7$, $x_2 = 3,5$. 23. $x = 1$. 24. $x_1 = 3\sqrt[3]{3}$, $x_2 = 9$. 25. $x = 4$, $y = 0,5$. 26. $x = 6$, $y = 2$. 27. (9; 7), (7; 9). 28. (3; 2). 29. (1; 1), $(\log_5 3; \log_3 5)$. 30. $(\log_2 5; \log_5 2)$.

§ 20

Вариант I

1. $x > 5$. 2. $x < -2$, $x > 2$. 3. $x < 3$. 4. $x > 1$. 5. $x > 8$. 6. $0 < x < 8$. 7. $-7 < x < 1$. 8. $x > 1$. 9. $x < -3$, $x > 2$. 10. $-3 < x < 2$. 11. $-1 < x < 1$, $3 < x < 5$. 12. $1\frac{2}{3} < x \leq 2$. 13. $x \geq 2$. 14. $x > 2$. 15. Нет решений. 16. $x > 1,5$. 17. $x \geq 2$. 18. $1\frac{2}{3} < x \leq 2$. 19. Нет решений. 20. $0 < x \leq 3$. 21. $x \geq 3$. 22. $-4 < x \leq 0$, $x \geq 5$. 23. $0 \leq x < 2$, $2 < x \leq 5$. 24. $2 \leq x \leq 5$. 25. $8 < x < 10$. 26. $3 < x \leq 4$, $9 \leq x < 10$. 27. $x < -2$, $x > 5$. 28. $-1 < x < 0$, $8 < x < 9$. 29. $x > 4$. 30. $0,01 < x < 1000$. 31. $x = 4$. 32. Нет решений. 33. $1 < x < 2$. 34. $2 < x < 8$. 35. $0 < x < 5^a$ при всех a . 36. $0 < x < a^2$ при $0 < a < 1$; $x > a^2$ при $a > 1$. 37. $-a < x < 1 - a$ при всех a . 38. $a + 0,2 < x < a + 1$ при всех a .

Вариант II

1. $x > -5$. 2. $x < -3$, $x > 3$. 3. $x > -4$. 4. $x > 2$. 5. $0 < x < \frac{1}{8}$. 6. $x > \frac{1}{8}$. 7. $x > 3$. 8. $-5 < x < 3$. 9. $x < -2$, $x > 3$. 10. $-2 < x < 3$. 11. $-8 < x < -7$, $1 < x < 2$. 12. $1,6 < x \leq 3$. 13. $x \geq 3$. 14. $x > 3$. 15. Нет решений. 16. $1,6 < x \leq 3$. 17. $x > 1,25$. 18. $x \geq 2$. 19. Нет решений. 20. $0 < x \leq 2$. 21. $x \geq 2$. 22. $-9 < x \leq -5$, $x \geq 0$. 23. $-5 \leq x < -3$, $-3 < x \leq 0$. 24. $1 \leq x \leq 4$. 25. $3,5 < x < 5,5$. 26. $3 < x \leq 5$, $7 \leq x < 9$. 27. $x < -4$, $x > 3$. 28. $-4 < x < 0$, $5 < x < 9$. 29. $x > 5$. 30. $\frac{1}{4} < x <$

< 64. 31. $x = 22$. 32. Нет решений. 33. $1 < x < 3$. 34. $3 < x < 9$.
 35. $0 < x < 0,5^a$ при всех a . 36. $x > a^3$ при $0 < a < 1$; $0 < x < a^3$ при
 $a > 1$. 37. $x > 1 - a$ при всех a . 38. $a + 1 < x < a + 2$ при всех a .

§ 21

Вариант I

1. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$. 2. $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{3}$. 3. $\frac{121\pi}{720}$; $\frac{121\pi}{240}$; $\frac{121\pi}{600}$. 4. 45° ; 225° ;
 270° . 5. 108° ; 324° ; 558° . 6. $\approx 28,6^\circ$; $74,5^\circ$; $601,9^\circ$. 7. 26 см.
 8. $\alpha = 3$. 9. $\frac{6}{\pi}$ см.

Вариант II

1. π ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$. 2. $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{15\pi}{4}$. 3. $\frac{203\pi}{900}$; $\frac{119\pi}{225}$; $\frac{76\pi}{225}$. 4. 60° ; 240° ;
 720° . 5. 72° ; 306° ; 450° . 6. $\approx 40,1^\circ$; $85,9^\circ$; $705,1^\circ$. 7. 6 см. 8. $\alpha = \frac{1}{3}$.
 9. $\frac{40}{\pi}$ см.

§ 22

Вариант I

4. IV, II, II. 5. II, III, III. 6. I, III, II. 7. I. 8. (0; 1), (0; -1).
 9. (-1; 0), (-1; 0). 10. I. 11. II. 12. III. 13. I. 14. III.

Вариант II

4. I, IV, III. 5. IV, II, I. 6. II, III, IV. 7. II. 8. (0; -1), (0; 1).
 9. (-1; 0), (1; 0). 10. IV. 11. II. 12. III. 13. IV. 14. II.

§ 23

Вариант I

1. $\sin \angle M = 0,6$; $\cos \angle M = 0,8$; $\operatorname{tg} \angle M = 0,75$; $\sin \angle K = 0,8$;
 $\cos \angle K = 0,6$; $\operatorname{tg} \angle K = \frac{4}{3}$. 2. $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 4. См. рис. 94. 5. См. рис. 95. 6. См. рис. 96. 7. (0,81; 0,59).
 8. (0,81; 0,59). 9. (-0,99; 0,14). 10. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$. 11. $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$;

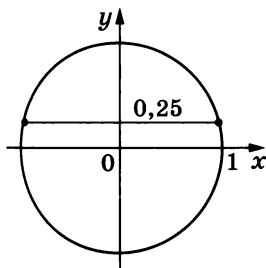


Рис. 94

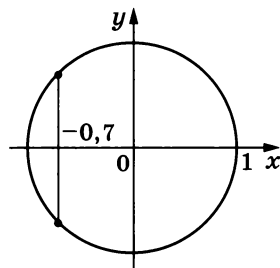


Рис. 95

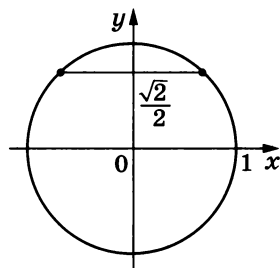


Рис. 96

$$-\frac{2\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}. \quad 12. -\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}. \quad 13. \sin 1,3 < \sin 1,5. \quad 14. \cos 2 > \cos 2,4. \quad 15. 1. \quad 16. -2. \quad 17. \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 18. \frac{2+\sqrt{2}}{2}. \quad 19. 0. \quad 20. 0. \quad 21. \sqrt{3}. \\ 22. \sin \alpha = 0, \cos \alpha = -1, \operatorname{tg} \alpha = 0. \quad 23. \sin \alpha = -1, \cos \alpha = 0, \operatorname{tg} \alpha \text{ не существует.} \quad 24. \sin \alpha = 0, \cos \alpha = -1, \operatorname{tg} \alpha = 0. \quad 25. \alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ 26. \alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 27. \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 28. x = \frac{2\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}. \\ 29. x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 30. x = -\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}. \quad 31. \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Вариант II

$$1. \sin \angle M = \frac{5}{13}; \quad \cos \angle M = \frac{12}{13}; \quad \operatorname{tg} \angle M = \frac{5}{12}; \quad \sin \angle K = \frac{12}{13}; \\ \cos \angle K = \frac{5}{13}; \quad \operatorname{tg} \angle K = 2,4. \quad 2. -\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 3. -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ 4. \text{См. рис. 97.} \quad 5. \text{См. рис. 98.} \quad 6. \text{См. рис. 99.} \quad 7. (0,81; -0,59). \\ 8. (-0,31; 0,95). \quad 9. (0,28; -0,96). \quad 10. -\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}. \quad 11. \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}. \quad 12. \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}. \quad 13. \sin(-0,7) < \sin(-0,5). \\ 14. \cos(-2) > \cos(-2,4). \quad 15. -1. \quad 16. 0. \quad 17. \frac{\sqrt{3}+2}{2}. \quad 18. \frac{2-\sqrt{2}}{2}. \quad 19. 0. \\ 20. 0. \quad 21. \sqrt{3}. \quad 22. \sin \alpha = 0, \cos \alpha = -1, \operatorname{tg} \alpha = 0. \quad 23. \sin \alpha = -1, \cos \alpha = 0, \operatorname{tg} \alpha \text{ не существует.} \quad 24. \sin \alpha = 0, \cos \alpha = -1, \operatorname{tg} \alpha = 0. \\ 25. \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 26. \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 27. \alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ 28. x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z}. \quad 29. x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 30. x = \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}. \quad 31. \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

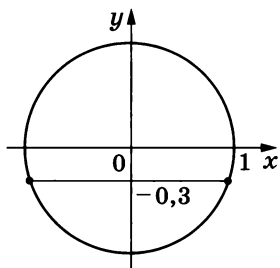


Рис. 97

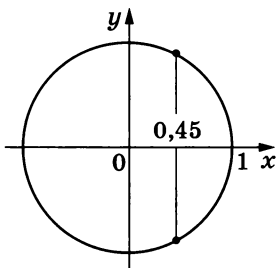


Рис. 98

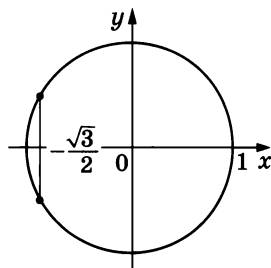


Рис. 99

§ 24

Вариант I

1. I. 2. IV. 3. I, III. 4. I. 5. I. 6. IV. 7. II. 8. I. 9. I. 10. II.
 11. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$. 12. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$. 13. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.
 14. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$. 15. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$. 16. $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$.
 17. $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$. 18. $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$. 19. $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{ctg} \alpha < 0$.
 20. II. 21. I или IV. 22. $\sin \frac{3\pi}{8} > \sin \frac{11\pi}{8}$. 23. $\cos \frac{5\pi}{8} < \cos \left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.
 24. $\sin 4,1 < \sin 3,01$. 25. $\cos(-1) > \cos(-2)$. 26. $\sin 2,5 > \cos 2,5$.
 27. III. 28. $x = \frac{\pi}{3}(k-1)$, $k \in \mathbf{Z}$. 29. $x = \pi(k-1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вариант II

1. III. 2. II. 3. II, IV. 4. I. 5. III. 6. IV. 7. I. 8. IV. 9. I. 10. II.
 11. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$. 12. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$. 13. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.
 14. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$. 15. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$. 16. $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{ctg} \alpha < 0$.
 17. $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$. 18. $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$. 19. $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$.
 20. III. 21. II или III. 22. $\sin \frac{4\pi}{7} > \sin \left(-\frac{4\pi}{7}\right)$. 23. $\cos \frac{13\pi}{9} < \cos \frac{2\pi}{9}$.
 24. $\sin 0,37 > \sin 6,01$. 25. $\cos(-3) < \cos(-5)$. 26. $\sin 4,5 < \cos 4,5$.
 27. II. 28. $x = \frac{\pi}{2}(k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. 29. $x = \frac{\pi}{2}(1-2k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

§ 25

Вариант I

1. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. 2. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{13}{3}}$. 3. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$,
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. 4. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. 5. Нет. 6. Да. 7. $-\frac{3}{8}$. 8. $\frac{11}{16}$.
 9. 2. 10. $\cos^2 \alpha$. 11. 1. 12. $\sin \alpha + \cos \alpha$. 13. -1. 14. $\operatorname{tg} \alpha$. 15. 1.
 16. $-\frac{1}{2}$. 17. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. 18. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вариант II

1. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. 2. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{\frac{11}{5}}$. 3. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. 4. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. 5. Нет. 6. Да. 7. $-\frac{3}{4}$. 8. $\frac{23}{32}$.
 9. $\frac{17}{13}$. 10. $\sin^2 \alpha$. 11. 1. 12. $\sin \alpha + \cos \alpha$. 13. 1. 14. $-\operatorname{tg} \alpha$. 15. 1.
 16. $\frac{5}{34}$. 17. $x = \frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbf{Z}$. 18. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

§ 26

Вариант I

8. $\pm\sqrt{1,4}$. 9. $\pm 0,7\sqrt{1,51}$. 10. $\pm 0,6\sqrt{1,8}$. 11. $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
 12. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вариант II

8. 0,455. 9. $\pm 0,8\sqrt{1,36}$. 10. 0,1495. 11. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
 12. $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

§ 27**Вариант I**

1. $M_1(-0,6; 0,8), M_2(-0,6; -0,8)$. 2. $M_1(-a; -b), M_2(-a; b)$.
 3. $\sin \frac{\pi}{5} > \sin \left(-\frac{\pi}{5}\right)$. 4. $\cos \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12}$. 5. $\operatorname{tg}(-4) < \operatorname{tg} 4$. 6. -1.
 7. $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$. 8. 0. 9. 0. 10. 1. 11. 1. 12. $\cos \alpha$. 13. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
 14. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 15. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант II

1. $M_1\left(-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right), M_2\left(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$. 2. $M_1(a; b), M_2(a; -b)$.
 3. $\sin \left(-\frac{\pi}{8}\right) < \sin \frac{\pi}{8}$. 4. $\cos \left(-\frac{\pi}{10}\right) > -\cos \frac{\pi}{10}$. 5. $\operatorname{tg}(-4) = -\operatorname{tg} 4$.
 6. -1. 7. $\sqrt{2}$. 8. 0. 9. 0. 10. 1. 11. 1. 12. $\sin \alpha$. 13. $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
 14. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 15. $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

§ 28**Вариант I**

1. $\sin 90^\circ = 1$. 2. $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 5. 0. 6. $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$. 7. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 9. -1. 10. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$. 11. $\frac{\sqrt{2}}{10}$. 12. $\frac{49}{31}$.
 13. $\operatorname{tg} \alpha$. 14. 2. 15. $\operatorname{tg} \alpha$. 16. $\cos \alpha$. 17. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. 18. $\sin 3\alpha (\sin 5\alpha + 1)$.
 21. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 22. $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 23. $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант II

1. $\sin 90^\circ = 1$. 2. $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. $\cos \pi = -1$.
 5. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. 6. $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 8. $-\sqrt{3} - 2$. 9. $-\frac{120}{169}$. 10. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.
 11. $\frac{\sqrt{14}+2}{6}$. 12. $\frac{31}{49}$. 13. $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$. 14. 2. 15. -1. 16. $\sin \alpha$.
 17. $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$. 18. $\sin 3\alpha (\cos 2\alpha - 1)$. 21. $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 22. $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 23. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

§ 29

Вариант I

1. $2 \sin 26^\circ \cos 26^\circ$. 2. $\cos^2 \frac{2\pi}{5} - \sin^2 \frac{2\pi}{5}$. 3. $\frac{2 \operatorname{tg} 32^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 32^\circ}$.
4. $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$. 5. $\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$.
6. $2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha$. 7. $\cos^2 3,5\alpha - \sin^2 3,5\alpha$. 8. $\frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}$. 9. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$.
10. $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. 11. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 12. $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$. 13. $-\frac{120}{169}$. 14. $\frac{24}{25}$.
15. $4\sqrt{2} - 5$. 16. 1. 17. $2 \cos \alpha$. 18. $2 \operatorname{tg} \alpha$. 20. $-0,352$. 21. $\frac{16}{15}$. 22. $\frac{5}{27}$.
23. $-\sqrt{2}$. 24. $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z}$. 25. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант II

1. $\cos^2 29^\circ - \sin^2 29^\circ$. 2. $2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}$. 3. $\frac{2 \operatorname{tg} 39^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 39^\circ}$.
4. $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$. 5. $\cos^2 \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$.
6. $\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$. 7. $2 \sin \frac{9}{2}\alpha \cos \frac{9}{2}\alpha$. 8. $\frac{2 \operatorname{tg} 4\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 4\alpha}$. 9. $\frac{3}{2} \sin 2\alpha$.
10. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 11. $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12. $1 + \sin 30^\circ = 1\frac{1}{2}$. 13. $-\frac{12\sqrt{10}}{49}$.
14. $-\frac{4}{5}$. 15. $13 - 8\sqrt{3}$. 16. 1. 17. $2 \sin \alpha$. 18. $-\operatorname{tg}^2 \alpha$. 20. 0,936. 21. $\frac{3}{2}$.
22. $\frac{79}{64}$. 23. $\frac{37}{64}$. 24. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$. 25. $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

§ 30

Вариант I

1. $\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}$. 2. $\frac{1 + \cos 54^\circ}{2}$. 3. $\frac{1 - \cos 150^\circ}{1 + \cos 150^\circ}$. 4. $\frac{1 - \cos 2\beta}{2}$.
5. $\frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{2}$. 6. $\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$. 7. $\frac{1 + \cos 6\alpha}{2}$. 8. $\frac{1 - \cos \frac{\pi}{7}}{2}$. 9. $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.
10. $\sqrt{2} - 1$. 11. 0,98. 12. 1,6928. 13. $\frac{b^4 - 6b^2 + 1}{(b^2 + 1)^2}$. 14. $\pm \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$.
15. $-\cos \alpha + \sin \alpha$. 16. 0. 18. 5. 19. $-\sqrt{2} - 1$. 20. $\frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2}$.
21. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$. 22. $x = \frac{2\pi k}{3}, x = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант II

1. $\frac{1 - \cos 90^\circ}{2}$. 2. $\frac{1 + \cos 108^\circ}{2}$. 3. $\frac{1 - \cos 164^\circ}{1 + \cos 164^\circ}$. 4. $\frac{1 + \cos 2\beta}{2}$.
 5. $\frac{1 - \cos x}{2}$. 6. $\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{3}}{1 + \cos \frac{\alpha}{3}}$. 7. $\frac{1 - \cos 8\alpha}{2}$. 8. $\frac{1 + \cos \frac{\pi}{8}}{2}$. 9. $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.
 10. $\sqrt{2} + 1$. 11. 0,18. 12. 1,8432. 13. $\frac{4a(1 - a^2)}{(1 + a^2)^2}$. 14. $\pm \sqrt{\frac{1+b}{1-b}}$. 15. -1.
 16. 2. 18. -3. 19. $2 + \sqrt{3}$. 20. $\pm \sqrt{\frac{1 + \cos 4\alpha}{2}}$. 21. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$.
 22. $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $x = \frac{4\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

§ 31**Вариант I**

1. $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{2}$. 2. $-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$. 3. Плюс. 4. $\sin 500^\circ > \cos 600^\circ$.
 5. $\sin 5,3\pi < \cos 4,3\pi$. 6. $\sin 12 < \cos 13$. 7. 1. 8. $\sqrt{3}$.

Вариант II

1. $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$. 2. -1. 3. Минус. 4. $\cos 580^\circ < \sin 460^\circ$. 5. $\sin 5,8\pi < \cos 6,1\pi$. 6. $\sin 13 > \cos 9$. 7. -2. 8. $\sqrt{3}$.

§ 32**Вариант I**

1. $2 \sin 19^\circ \cos 1^\circ$. 2. $\sqrt{2} \sin 35^\circ$. 3. $2 \cos 6^\circ \cos 2^\circ$. 4. $-\sin 10^\circ$.
 5. $-2 \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{3\pi}{16}$. 6. $2 \cos \frac{19\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24}$. 7. $\sqrt{3} \sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right)$.
 8. $-2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{5} \right) \sin \frac{\alpha}{2}$. 9. $\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{20}$. 10. $-2 \sin 15^\circ \cos 35^\circ$. 11. $\sqrt{2} \sin \alpha$.
 12. $2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cos \frac{\pi}{12}$. 13. $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ}$. 14. $\cos 10^\circ$. 15. $2 \cos 2\alpha \cos \alpha$.
 16. $\sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$. 17. $2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8} \right)$. 18. $\frac{2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)}{\cos \alpha}$.
 19. $4 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 20. $-4 \sin \alpha \cos \frac{7\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$. 21. $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{13\alpha}{2}$.
 22. $\sin 2\alpha \cos 5\alpha$. 27. 4. 28. $-\frac{1}{2}$. 29. $\sin 8\alpha - \sin 6\alpha + \sin 2\alpha$.
 30. $\sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

Вариант II

1. $2 \sin 11^\circ \cos 1^\circ$. 2. $\sqrt{3} \cos 100^\circ$. 3. $2 \cos 12^\circ \cos 6^\circ$. 4. $-\sin 50^\circ$.
5. $-2 \cos \frac{9\pi}{80} \sin \frac{\pi}{80}$. 6. $-\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12}$. 7. $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{8} \right)$.
8. $2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{7} \right) \cos \frac{\alpha}{2}$. 9. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 10. $-\sqrt{2} \sin 25^\circ$. 11. $\cos \alpha$. 12. $-\sqrt{2} \sin \alpha$.
13. $\frac{\sin 5^\circ}{\cos 29^\circ}$. 14. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ$. 15. $-2 \sin 3\alpha \sin 2\alpha$. 16. $\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$.
17. $2\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2} \right)$. 18. $\frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{\cos \alpha}$. 19. $4 \sin 2\alpha \times$
 $\times \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$. 20. $4 \cos \alpha \sin 7\alpha \cos 2\alpha$. 21. $4 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos 2\alpha \cos \frac{17\alpha}{2}$.
22. $\cos \alpha \cos 2\alpha$. 27. 4. 28. $\frac{3}{2}$. 29. $\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 15\alpha$.
30. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

§ 33

Вариант I

1. $\frac{\pi}{4}$. 2. $\frac{2\pi}{3}$. 3. $\frac{3\pi}{2}$. 4. $\frac{\pi}{3}$. 5. $\frac{1}{2}$. 6. $\frac{4}{5}$. 7. $\frac{7}{6}$. 8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 9. $-0,2$.
10. $\frac{2}{5}$. 11. $0,8$. 12. $\sqrt{2}$. 13. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$. 14. $[0; 2]$. 15. $a = 0$. 16. $\frac{\pi}{3}$.
17. $\frac{3\pi}{4}$. 18. $\frac{5\pi}{6}$. 19. $x = \pm \arccos 0,1 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 20. $x = \frac{2\pi n}{5}$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 21. $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 22. $x = \pm 3 \arccos \frac{\sqrt{2}}{3} + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
23. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 24. Нет решений.
25. $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$. 26. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 27. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 28. $-\frac{11\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$. 29. $\frac{\pi}{16}$, $\frac{7\pi}{16}$, $\frac{9\pi}{16}$, $\frac{15\pi}{16}$. 30. $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$.
31. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 32. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вариант II

1. $\frac{\pi}{6}$. 2. $\frac{3\pi}{4}$. 3. 3π . 4. $\frac{3\pi}{10}$. 5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6. $0,3$. 7. $\frac{3}{2}$. 8. 1. 9. $-0,1$.
10. $\frac{3}{7}$. 11. $0,6$. 12. $\sqrt{8}$. 13. $[-3; 3]$. 14. $[1; 3]$. 15. Таких значений нет.
16. $\frac{\pi}{4}$. 17. $\frac{2\pi}{3}$. 18. $\frac{3\pi}{4}$. 19. $x = \pm \arccos 0,7 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
20. $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 21. $x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 22. $x = \pm 4 \arccos \frac{1}{3} +$

+ $8\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 23. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 24. Нет решений. 25. $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 26. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 27. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 28. -5π , $-\pi$, π , 5π . 29. $\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}$, $\frac{13\pi}{18}$, $\frac{23\pi}{18}$, $\frac{25\pi}{18}$, $\frac{35\pi}{18}$. 30. $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$. 31. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 32. $x = \pi(1 + 2n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 34

Вариант I

1. $-\frac{\pi}{2}$. 2. $\frac{\pi}{4}$. 3. $-\frac{2\pi}{3}$. 4. π . 5. $\frac{1}{2}$. 6. 0,3. 7. $2\frac{2}{3}$. 8. $\frac{2}{3}$. 9. 0,31.
10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 12. $\frac{4}{5}$. 13. $\frac{12}{13}$. 14. $\frac{3}{4}$. 15. $[-2; 2]$. 16. $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. 17. 0.
18. $\frac{\pi}{4}$. 19. $-\frac{2\pi}{5}$. 20. $\frac{\pi}{3}$. 21. $-\frac{\pi}{6}$. 22. $x = (-1)^n \arcsin 0,35 + \pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 23. $x = \pi(1 + 4n)$, $n \in \mathbf{Z}$. 24. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.
25. $x = (-1)^n \frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 26. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
27. Нет решений. 28. $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 29. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
30. $x = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 31. $-\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$.
32. π , 2π . 33. $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$. 34. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
35. $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 36. $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$,
 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вариант II

1. $\frac{\pi}{2}$. 2. $-\frac{\pi}{4}$. 3. $-\frac{\pi}{6}$. 4. $\frac{2\pi}{3}$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 6. 0,2. 7. $3\frac{1}{4}$. 8. $-\frac{1}{7}$. 9. 0,52.
10. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 11. $\frac{1}{2}$. 12. $\frac{3}{5}$. 13. $\frac{5}{13}$. 14. $\frac{3}{4}$. 15. $\left[-3\frac{1}{3}; 3\frac{1}{3}\right]$. 16. $[-1; 0]$.
17. 0. 18. $\frac{\pi}{3}$. 19. $-0,2\pi$. 20. $\frac{\pi}{4}$. 21. $\frac{\pi}{3}$. 22. $x = (-1)^n \arcsin 0,24 + \pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 23. $x = -\frac{3\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 24. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.
25. $x = (-1)^n \pi + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 26. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
27. Нет решений. 28. $x = \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$. 29. $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
30. $x = (-1)^n \frac{1}{4} \arcsin \frac{3}{5} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 31. $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$. 32. $-\frac{4\pi}{9}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$.

$$33. \frac{5\pi}{12}, \quad \frac{11\pi}{12}. \quad 34. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 35. x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 36. x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

§ 35

Вариант I

$$1. \frac{\pi}{4}. \quad 2. -\frac{\pi}{6}. \quad 3. \frac{\pi}{12}. \quad 4. \frac{3\pi}{8}. \quad 5. \sqrt{3}. \quad 6. -1. \quad 7. 3,5. \quad 8. -\sqrt{3}. \quad 9. 3,2.$$

$$10. 3. \quad 11. 1,7. \quad 12. \frac{\sqrt{7}}{3}. \quad 14. \frac{2\sqrt{5}}{5}. \quad 15. \frac{4}{5}. \quad 16. \frac{2\pi}{3}. \quad 17. -\frac{\pi}{5}. \quad 18. \frac{\pi}{8}.$$

$$19. \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 20. x = \arctg 5 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 21. x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$22. x = -\pi + 3\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 23. x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 24. x = \frac{1}{3} \arctg 5,5 + \frac{\pi n}{3},$$

$$n \in \mathbf{Z}. \quad 25. x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 26. x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 27. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$n \in \mathbf{Z}. \quad 28. x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 29. -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}. \quad 30. \frac{\pi}{12}, \quad \frac{7\pi}{12}.$$

$$31. x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 32. \text{Нет корней.}$$

Вариант II

$$1. -\frac{\pi}{3}. \quad 2. -\frac{\pi}{4}. \quad 3. -\frac{\pi}{3}. \quad 4. \pi. \quad 5. \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad 6. 0. \quad 7. 5. \quad 8. 0. \quad 9. -0,4.$$

$$10. -0,6. \quad 11. -3,5. \quad 12. \frac{\sqrt{7}}{3}. \quad 14. \frac{\sqrt{10}}{10}. \quad 15. \frac{\sqrt{6}}{6}. \quad 16. \frac{3\pi}{4}. \quad 17. -\frac{\pi}{7}. \quad 18. -\frac{\pi}{6}.$$

$$19. \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 20. x = \arctg 2 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 21. x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$22. x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 23. x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 24. x = \arctg 2 + \pi n,$$

$$n \in \mathbf{Z}. \quad 25. x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 26. x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 27. x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$n \in \mathbf{Z}. \quad 28. x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 29. -\frac{4\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}. \quad 30. -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}.$$

$$31. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 32. \text{Нет корней.}$$

§ 36

Вариант I

$$1. x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 2. x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$3. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 4. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 5. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$n \in \mathbf{Z}. \quad 6. x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = -\arctg 2 + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad 7. x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$n \in \mathbf{Z}. \quad 8. x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 9. x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

10. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.
 12. $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 13. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.
 14. $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 15. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 16. $x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 17. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 18. $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$,
 $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 19. $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 20. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 21. $x = \pi + 2\pi n$,
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 22. $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{5} - \arcsin \frac{4}{5} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
 23. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 24. $x = \frac{\pi n}{4}$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}$, $n \in \mathbf{Z}$.
 25. $x = \operatorname{arctg} \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 26. $x = \pi n$,
 $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 27. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 28. $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$,
 $x_2 = \pi - \operatorname{arctg} 2$.

Вариант II

1. $x = 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x =$
 $= (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. $x = 2\pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 5. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 6. $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 7. $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 8. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 9. $x = 2\pi n$,
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 10. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$,
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 12. $x = \frac{2\pi n}{5}$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 13. $x = \frac{\pi n}{2}$,
 $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 14. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 15. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 16. $x = \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 17. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 6 +$
 $+ \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 18. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 19. $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$,
 $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 20. $x = 2\pi n$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
 21. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 22. $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{5} +$
 $+ \arcsin \frac{3}{5} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 23. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 24. $x = \frac{\pi n}{12}$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 25. $x = \operatorname{arctg} \frac{7+\sqrt{5}}{2} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} \frac{7-\sqrt{5}}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 26. $x = \pi n$,

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 27. x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad 28. x_1 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \operatorname{arctg} 2, \quad x_3 = \pi + \operatorname{arctg} 2.$$

§ 37

Вариант I

$$1. \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad 2. \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{13\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}. \quad 3. \text{ При всех } x \in \mathbf{R}, \quad \text{кроме } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$4. \frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Вариант II

$$1. -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad 2. \frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}. \quad 3. \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad 4. \varphi + 2\pi k < x < \pi - \varphi +$$

$$+ 2\pi k, \quad \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Оглавление

| | |
|-------------|---|
| Предисловие | 3 |
|-------------|---|

Материал для повторения курса алгебры 7—9 классов

| | |
|--|----|
| Общие теоретические сведения | 5 |
| 1. Квадратные уравнения | 7 |
| 2. Квадратичная функция | 11 |
| 3. Решение квадратных неравенств с помощью графика
квадратичной функции | 14 |
| 4. Метод интервалов | 16 |
| 5. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестное
под знаком модуля | 18 |
| Задания для подготовки к экзамену | 22 |

Глава I. Действительные числа

| | |
|--|----|
| § 1. Целые и рациональные числа | 27 |
| § 2. Действительные числа | 28 |
| § 3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия | 30 |
| § 4. Арифметический корень натуральной степени | 32 |
| § 5. Степень с рациональным и действительным
показателями | 37 |
| Контрольная работа № 1 | 42 |
| Задания для подготовки к экзамену | 43 |
| Задания для интересующихся математикой | — |

Глава II. Степенная функция

| | |
|--|----|
| § 6. Степенная функция, её свойства и график | 45 |
| § 7. Взаимно обратные функции | 50 |
| § 8. Равносильные уравнения и неравенства | 52 |
| § 9. Иррациональные уравнения | 54 |
| § 10. Иррациональные неравенства | 57 |
| Контрольная работа № 2 | 60 |
| Задания для подготовки к экзамену | 61 |
| Задания для интересующихся математикой | 63 |

Глава III. Показательная функция

| | |
|--|----|
| § 11. Показательная функция, её свойства и график | 68 |
| § 12. Показательные уравнения | 72 |
| § 13. Показательные неравенства | 73 |
| § 14. Системы показательных уравнений и неравенств | 75 |
| Контрольная работа № 3 | 76 |
| Задания для подготовки к экзамену | 77 |
| Задания для интересующихся математикой | 80 |

Глава IV. Логарифмическая функция

| | |
|---|-----|
| § 15. Логарифмы | 83 |
| § 16. Свойства логарифмов | 85 |
| § 17. Десятичные и натуральные логарифмы.
Формула перехода | 87 |
| § 18. Логарифмическая функция, её свойства и график | 90 |
| § 19. Логарифмические уравнения | 95 |
| § 20. Логарифмические неравенства | 98 |
| Контрольная работа № 4 | 102 |
| Задания для подготовки к экзамену | 103 |
| Задания для интересующихся математикой | 105 |

Глава V. Тригонометрические формулы

| | |
|---|-----|
| § 21. Радианная мера угла | 111 |
| § 22. Поворот точки вокруг начала координат | 113 |
| § 23. Определение синуса, косинуса и тангенса угла | 116 |
| § 24. Знаки синуса, косинуса и тангенса | 120 |
| § 25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом
одного и того же угла | 123 |
| § 26. Тригонометрические тождества | 125 |
| § 27. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$ | 128 |
| § 28. Формулы сложения | 130 |
| § 29. Синус, косинус и тангенс двойного угла | 133 |
| § 30. Синус, косинус и тангенс половинного угла | 137 |
| § 31. Формулы приведения | 139 |
| § 32. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов | 143 |
| Контрольная работа № 5 | 147 |
| Задания для подготовки к экзамену | 148 |
| Задания для интересующихся математикой | — |

Глава VI. Тригонометрические уравнения

| | |
|--|-----|
| § 33. Уравнение $\cos x = a$ | 151 |
| § 34. Уравнение $\sin x = a$ | 155 |
| § 35. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ | 160 |
| § 36. Решение тригонометрических уравнений | 164 |
| § 37*. Примеры решения простейших тригонометрических
неравенств | 169 |
| Контрольная работа № 6 | 171 |
| Задания для подготовки к экзамену | 172 |
| Задания для интересующихся математикой | 174 |
| Ответы | 180 |

Учебное издание

Шабунин Михаил Иванович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Газарян Рубен Гургенович

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Дидактические материалы

10 класс

Базовый уровень

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младшие редакторы *Е. А. Андреевкова, Е. В. Трошко*
Художник *Е. В. Соганова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *В. В. Брагина*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *С. В. Николаева, Т. А. Лебедева*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 07.07.10. Формат 60 × 90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд.л. 9,7. Тираж 7000 экз. Заказ № 30405.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ

Сертификат 50470771760251567093538041786299876209

Владелец Сулейманова Татьяна Александровна

Действителен с 06.03.2023 по 05.03.2024